

الدكتور خالد حربى

أسس الرياضيات الحديثة فى الحضارة الإسلامية



أسس الرياضيات الحديثة في الحضارة الإسلامية

تأليف الدكتور

خالد أحمد حسنين علي حربي

جامعة الإسكندرية

2014



دار الكتب والوثائق القومية	
عنوان المصنف	أسس الرياضيات الحديثة في الحضارة الإسلامية.
اسم المؤلف	خالد أحمد حسنين حربي.
اسم الناشر	المكتب الجامعي الحديث.
رقم الايداع	2012/16182
الترقيم الدولي	978-977-438-309-0.
تاريخ الطبعة	الأولى يوليو 2013.

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

مقدمة

الحمد لله الذى علم الإنسان ما لم يعلم، والصلاة والسلام على معلم البشرية سبيل الخير، وعلى آله وصحبه والتابعين إلى يوم الدين، وبعد :

فُتُتد الرياضيات من أهم العلوم التى راجت وتطورت فى الحضارة الإسلامية إبان عصور ازدهارها، فلقد اهتم علماء الرياضيات فى الحضارة الإسلامية اهتماماً بالغاً بالرياضيات بمختلف فروعها: الحساب، والجبر، واللوغاريتمات، والهندسة، وحساب المثلثات، والتفاضل والتكامل.

وقد بدأت إرهابات نهضة المسلمين الرياضياتية بإطلاع العلماء على تراث الأمم الأخرى، وخاصة الهنود واليونان، وتناولوه بالدرس والتمحيص والنقد، الأمر الذى انتقل بهم إلى مرحلة الإبداع، فابتكروا واكتشفوا واخترعوا من الانجازات الرياضياتية التى أفادت الإنسانية جمعاء، وذلك باعتراف الغربيين أنفسهم، فإن العقل ليدش - على حد قول كاجورى - عندما يرى ما عمله العرب والمسلمون فى الجبر، وما المكتشفات اليوم - بحسب نيكلسون - لتحسب شيئاً مذكوراً إزاء ما نحن مدينون به للرواد العرب والمسلمين الذين كانوا مشعلاً وضاء فى القرون الوسطى المظلمة ولا سيما فى أوربا، الأمر الذى جعل مؤرخ العلم الشهير جورج سارتون يقرر أن العرب والمسلمين كانوا أعظم معلمين فى العالم، وأنهم زادوا على العلوم التى أخذوها، ولم يكتفوا بذلك، بل أوصلوها درجة جديرة بالاعتبار من حيث النمو والارتقاء.

ومن العلوم التى نمت فى الحضارة الإسلامية وارتقت، الرياضيات تلك التى تقدمت فى الحضارة الإسلامية تقدماً ملحوظاً عما كانت عليه قبل

الإسلام، ويرجع ذلك إلى ما قدمه علماء الرياضيات من إنجازات علمية ظل تأثيرها ممتداً منذ عصر الحضارة الإسلامية وحتى العصر الحديث.

عرف العالم إنجازات علماء الرياضيات في الحضارة الإسلامية من خلال مؤلفاتهم التي انتقلت إلى الغرب عبر حركة الترجمة من العربية إلى اللغات الغربية والتي بدأت منذ القرن العاشر الميلادي، واستمرت حوالى قرنين من الزمان نقل خلالها أمهات مؤلفات الرياضيات وغيرها من العلوم الإسلامية إلى اللغات الغربية السائدة عصرئذ وهى اللاتينية والقشتالية والعبرية، فعرف الغرب ووقف على إنجازات علماء الرياضيات في الحضارة الإسلامية من أمثال: الخوارزمي وثابت بن قرة، وأبى كامل المصرى، والكرخى، والكوهى، وعمر الخيام، ونصير الدين الطوسى، وابن البناء المراكشى، والكاشى، والقصادى، وغيرهم، ولكن المؤسف أن كثيراً من الغربيين قد أخذوا من إنجازات علماء الرياضيات المسلمين ونسبوا إلى أنفسهم، وظلت كتب تاريخ العلوم تتناقل أسماءهم على أنهم هم أصحاب الكشوف العلمية الرياضياتية التى اكتشفها العلماء المسلمون، ومن ذلك أن العالم المسلم أبابكر محمد بن الحاسب الكرخى قد اكتشف فى القرن الرابع الهجرى / العاشر الميلادى ووضع أسس نظرية ذات الأسين (ذات الحدين) لأسس صحيحة موجبة، ورتب معاملات مفكوك $(س + 1)^n$ ، فجاء مثله لمعاملات نظرية ذات الحدين، ذلك المثلث المشهور الذى أخذه بسكال الفرنسى (ت 1662) وادعاه لنفسه حتى اشتهر المثلث فى تاريخ الرياضيات بمثلث بسكال وليس مثلث الكرخى!.

كذلك أبدع عمر الخيام لأول مرة فى تاريخ الرياضيات فكرة التصنيف، فعُد بذلك أول من مهد الطريق أمام تدشين "الهندسة التحليلية" حينما

قام بتصنيف المعادلات بحسب درجتها، وبحسب الحدود التي فيها محصورة في أربعة عشر نوعاً، وبرهن هندسياً على حل كل معادلة منها باستخدام القطوع المخروطية الثلاث: الدائرة، والقطع المكافئ، والقطع الزائد؛ فجاء في القرن السابع عشر الميلادي سيمون الهولندي (ت 1620) وتتبع تصنيف الخيام، وأدخل عليه بعض التعديلات الطفيفة، فنسب إليه علماء الغرب "فكرة التصنيف" وتناسوا مبتكرها الحقيقي عمر الخيام!، تماماً كما تناسوا طريقته الهندسية في حل جميع معادلات الدرجة الثالثة، تلك الطريقة التي تبدو بنصها الحرفي في كتاب "الجومطري" لديكارت (ت 1650). وأبدع الخيام الفروض الثلاثة في برهانه على المصادرة الخامسة لإقليدس، تلك الفروض التي لعبت دوراً مهماً في تدشين الهندسات اللاإقليديسية الحديثة، الأمر الذي جعل أحد علماء الرياضيات الغربيين وهو ساكيري (ت 1733) ينتحلها في نظريته عن الخطوط المستقيمة وينسبها له مؤرخوا الرياضيات الغربيون.

وإذا كان نصير الدين الطوسي قد استطاع أن يبرهن على أن مجموع زوايا أى مثلث تساوى قائمتين، وذلك يكافئ المصادرة الخامسة من مصادرات إقليدس، فإن الطوسي قد وضع بذلك أساس الهندسة اللاإقليديسية الحديثة والتي تقترن بأسماء غربية مثل فاوس الألماني (ت 1855)، وبولياى المجرى (ت 1856) وغيرهما. وإذا كان كتاب "أشكال القطاعات" لنصير الدين الطوسي يُعد أول كتاب من نوعه على مستوى العالم يفصل علم المثلثات عن علم الفلك، واعتمد مرجعاً رئيساً لكل علماء الغرب الباحثين في علم المثلثات الكروية والمستوية، فإن بعضهم انتحل كثيراً من نظرياته ونسبها لنفسه، فالناظر في كتاب ريجيومونتانوس "علم حساب المثلثات" يدرك لأول وهلة أن كثيراً من نظرياته وأفكاره موجودة بنصها في كتاب نصير الدين الطوسي

وفى النصف الأخير من القرن التاسع عشر الميلادى ترجم اريستيدمار كتاب تلخيص أعمال الحساب لابن البناء المراكشى إلى اللغة الفرنسية، وبعد أن درسه دراسة وافية، قرر أن كثيراً من النظريات الرياضياتية المنسوبة لعلماء غربيين هي نظريات ابن البناء المراكشى. وإذا كان مؤرخوا الرياضيات الغربيون ينسبون نظرية "ذات الحدين" لإسحاق نيوتن أو لغيره من علماء العرب، فإن منهم من يعترف بأن صاحبها هو العالم الرياضياتى المسلم غيات الدين الكاشى، بحسب تقرير دريك سترويك. كما يعترف فرانسيس كاجورى وهو أحد أشهر مؤرخى الرياضيات الغربيين بأن أبا الحسن القلصادى قد استخرج قيمة تقريبية للجزر التربيعى للكمية $(أ^2 + ب)$ ، وهذه القيمة أخذها علماء الرياضيات الغربيين وخاصة ليوناردو أف بيزا الإيطالى ومواطنه تارتاليا وغيرهما واستعملوها فى إيجاد القيم التقريبية للجزور الصم إلى غير ذلك من الإنجازات والإبتكارات الرياضياتية التى أبدعها علماء الرياضيات فى الحضارة الإسلامية، ونسبت فى تاريخ العلم إلى أسماء غربية، الأمر الذى يحول دون وقوفنا على الحجم الحقيقى لإسهام علماء الرياضيات المسلمين فى الحضارة الإنسانية.

لكنى طالما ناديت بأن التمهيص والدراسة فى المخطوطات العربية الإسلامية، ومحاولة فهمها وتحقيقها ليوضح بصورة جلية أن مخطوطات حضارتنا الإسلامية مازالت تحوى كنوزاً وذخائراً لم يكشف عنها بصورة لائقة حتى اليوم! ومن بين هذه الكنوز وتلك الذخائر إنجازات علماء الرياضيات المسلمين المدونة فى مخطوطاتهم، وبالمخطوطات وحدها نثبت

أُسْبِقِيَّة علماء الحضارة الإسلامية على علماء الغرب فيما يختص بنسبة الإكتشافات والابتكارات الرياضياتية الإسلامية إلى الآخرين، فبين الحين والآخر نطالع مخطوطاً عربياً رياضياتياً وقد حُقِّق ونشر، وأُثبت فيه محققه أُسْبِقِيَّة صاحب المخطوط عن نظيره الغربي الذي أخذ كشفه أو ابتكاره ونسبه إلى نفسه. وهذه الطريق وأعنى بها تحقيق نشر المخطوطات الرياضياتية الإسلامية، هي - كما ذكرت - من أحسن السبل لرد الفضل لأهله وصحيح مسار تاريخ العلم العالمى.

وفى هذه السبيل تبحث هذه الدراسة، متساعلة عن الحجم الحقيقى لإسهام علماء الرياضيات المسلمين فى الحضارة الإنسانية.

الله أسأل أن ينتفع بعلمى هذا فهو تعالى من وراء القصد
وعليه التكلان وإليه المرجع والمآب.

خالد أحمد حربى

الإسكندرية فى

رمضان 1433هـ/ أغسطس 2012

مدخل تمهيدى

تطور الرياضيات حتى الحضارة الإسلامية

بدأت رياضيات ما قبل التاريخ بدايات بديهية من خلال وجود جماعات عددية سواء فى الإنسان مثل عدد الأصابع وعدد الأرجل، أو الحيوان، أو الأشياء، واستعان إنسان العصور القديمة بالحصى لعد الأشياء، ومنها جاءت لفظة "إحصاء"، وينمو الإنسان وتزايد عدده وموارده كان عليه أن يعدد حاجاته وأقاربه وقبيلته، وما إلى ذلك. ثم ظهرت عمليات الجمع والطرح والقسمة والضرب والأوزان والمقاييس بصورة اضطرارية لاحتياج الإنسان إلى عمليات كثيرة ظهرت له مثل البيع والشراء والمقايضة.

وفى الحضارة المصرية القديمة ارتبطت الرياضيات بالناحية العملية، الأمر الذى جعل المصريون يرتقون بها ويطورونها. وقد ظهر هذا الارتقاء الرياضياتى المصرى فى بناء الأهرامات التى بلغت من الدقة ما جعلها أحد عجائب الدنيا السبع حتى الآن. فلقد عرفت مصر القديمة الرياضيات والحساب أكثر من سواها، وذلك لارتباط هذه العمليات بالبناء الهندسى للمعابد والأهرام والمقابر الفرعونية الكبرى. ففى سنة 2950 ق.م بنى المهندس المصرى امحوتب هرم سقارة المدرج مستخدماً نظريات رياضياتية وعمليات حسابية وهندسية فى غاية الدقة. وبعد ما يقرب من مائة سنة بنى خوفو الهرم الأكبر بحيث تتجه زواياه إلى الجهات الأربع الأصلية اتجاهاً صحيحاً، وجاءت أضلع مثلثات القاعدة فى غاية الدقة بحيث لا يتعدى الخطأ فيها نسبة واحد على أربعة آلاف. وبذلك يتضح الشوط الكبير الذى قطعه المصريون القدماء فى تطور الرياضيات وتقدمها، فسجلوا فى تاريخ هذا العلم معلومات مهمة فى الحساب والهندسة والمتواليات الهندسية والحسابية. وقد عثر على كل هذه العمليات الرياضياتية فى بردية الكاتب المصرى أحمس التى يرجع تاريخها إلى خمسة آلاف سنة تقريباً.

ومما يشير إلى التقدم الرياضياتي الذي بلغه المصريون القدماء أن فيثاغورث اليوناني قد صاغ نظريته المعروفة باسمه والقائلة بأن المربع المنشأ على الوتر في المثلث القائم الزاوية يساوي مجموع المربعين المنشأين على الضلعين الآخرين. وقد جاءت هذه النظرية بعد زيارة فيثاغورث لمصر ونقله معرفة المصريين بمعادلة الدرجة الثانية بصورتها:

$$س^2 + ص^2 = 100، ص = \frac{3}{4} س، إذن س = 8، ص = 6.$$

وترتبط هذه المعادلة ارتباطاً وثيقاً بالحل الهندسي للعلاقة بين الأعداد 3، 4، 5 في مثلث قائم الزاوية. ومن هنا صاغ فيثاغورث نظريته السالفة.

وفى بلاد الرافدين تطالعنا صحف سنكرة المعاصرة لبردية أحمس أن البابليين اخترعوا الأحرف الهجائية، ودوتوا الأرقام والأعداد بها طبقاً للترتيب الأبجدي، ومرتبة آحاد وعشرات ومئات، ووضعوا جداول للمربعات والمكعبات. وحسب البابليون والسومريون مساحة المستطيل وشبه المنحرف والمثلث القائم، ووقفوا على تشكل ستة مثلثات متساوية الأضلاع في الدائرة، ومقدار كل زاوية في كل مثلث تساوي ستين درجة. وينقسم محيط الدائرة إلى ستة أقواس يساوي نصف قطر الدائرة وتر كل منها.

وعرف البابليون والسومريون المعادلات من الدرجة الأولى التي لها مجهول واحد، والمعادلات من الدرجة الثانية التي يأتي حلها من معادلتين آتيتين أحدهما على الأقل من الدرجة الثانية، أو كلاهما من نفس الدرجة.

واستعمل الساميون الأرقام الحرفية، فدوتوا الأرقام باستعمال حروف الهجاء العربية بحيث يدل على كل حرف برقم معين، فيرمز حرف الألف إلى الواحد (1)، ويرمز حرف الباء إلى الاثنين (2)، ويرمز حرف الجيم إلى

الثلاثة (3)، ويرمز حرف الياء إلى العشرة (10) .. وهكذا الأحاد والعشرات
والمئات والألوف وعشرات الألوف ومئات الألوف كما يلي:

الأحاد

أ	ب	ج	د	هـ	و	ز	ح	ط
1	2	3	4	5	6	7	8	9

العشرات

ى	ك	ل	م	ن	س	ع	ف	ص
10	20	30	40	50	60	70	80	90

المئات

ق	ر	ش	ت	ث	خ	ذ	ض	ظ
100	200	300	400	500	600	700	800	900

الألوف

غ	بغ	جغ	دغ	هـغ	وغ	زغ	حغ	طغ
1000	2000	3000	4000	5000	6000	7000	8000	9000

عشرات الألوف

بغ	كغ	لغ	مغ	نغ	سغ	عغ	فغ	صغ
10000	20000	30000	40000	50000	60000	70000	80000	90000

مئات الألوف

قغ	رغ	شغ	تغ	ثغ	خغ	نغ	ضغ	ظغ
100000	200000	300000	400000	500000	600000	700000	800000	900000

وراعى العرب فى تركيب الجمل تقديم الحرف ذو العدد الأكبر، يليه الأصغر فالأصغر كما فى الأمثلة التالية:

$$\text{كى} = 10 + 20 = 30 \text{ لأن ك} = 20 ، \text{ى} = 10.$$

$$\text{شرق} = 300 + 200 + 100 = 600 \text{ لأن ش} = 300 ، \text{ر} = 200 ، \text{ق} = 100.$$

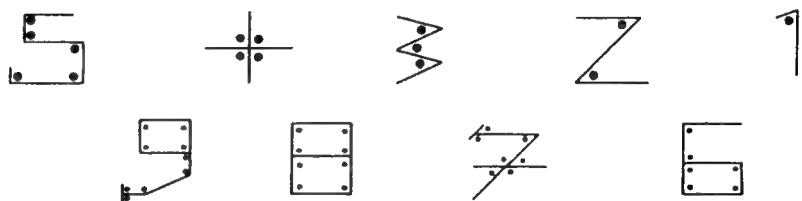
$$\text{لغغ} = 30000 + 1000 = 31000 ، \text{لغ} = 30000 ، \text{غ} = 1000.$$

وهكذا ... ظل العرب يستعملون طريقة حساب الجمل هذه حتى مجئ الإسلام واستعملها الكتاب والعلماء فى زمن الرسول (صلى الله عليه وسلم) وبعده وحتى بعد ظهور الأرقام العربية، يشير إلى ذلك استعمال العلماء طريقة حساب الجمل فى مؤلفاتهم بعد القرن الأول الهجرى وحتى القرن الرابع الهجرى، ومنهم البيرونى فى كتابه القانون المسعودى.

أما بلاد اليونان فقد عرفت بدورها العلوم الرياضياتية وطورتها بعد أن اقتبست عن المصريين والسومريين والبابليين، ولما نقل العرب والمسلمون تراث الأمم الأخرى وخاصة اليونان، لم تستطع الرياضيات اليونانية أن تروى ظمأهم، فالعقلية اليونانية إنما قامت على فلسفة نظرية ورياضية واستدلالية. فقد شغف اليونان بالرياضيات النظرية المجردة، واهتموا كثيراً بالخيال الرياضى إشباعاً لنهمهم العقلى. وهذا ما دعاهم إلى وضع كتب فى الهندسة لا نظير لها عند الأمم الأخرى، مثل مؤلفات أقليدس، وأبولونيوس. أما العرب فقد اجتذبهم الناحية العملية من الرياضيات فضلاً عن تعلقهم بالجانب النظرى فيها. فهم لم يكتفوا باستيعاب الهندسة الإغريقية، ولكنهم قد اهتموا

أيضاً بتطبيقها عملياً. وقد نجحوا فى ذلك أيما نجاح. وهنا تكمن عبقرية العرب المسلمين وأثرها العظيم فى تقدم العلم عامة، والرياضيات خاصة، والجبر بصورة أخص^(١) كما سيأتى.

إن الأعداد التى استخدمها اليونان والرومان وغيرهما هى الأعداد اليونانية وصورتها: IV, V, VI, I, II, III وهذه الرموز يمكن استخدامها فى عملية الجمع، بينما يكون من الصعب جداً بل من المستحيل استخدامها فى عمليات الضرب والقسمة، أو حتى جمع أعداد بالألوف أو الملايين، وعندما تسربت علوم الهند إلى العرب فى قمة معرفتهم بهذه العلوم خلال فترة نقل كتاب السندهند إلى اللغة العربية فى عهد الخليفة المنصور، تعرف العرب على أنظمة الهنود فى مجال الرياضيات، واطلعوا على الأعداد الهندية، ثم هذبوها وكونوا منها سلسلة عُرفت بالأرقام الهندية وصورتها: ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨، ٩ وتستعمل هذه السلسلة فى الهند، وفى البلاد العربية الشرقية. وابتكر العرب سلسلة الأرقام الغبارية^(٢) المرتبة على أساس الزوايا، فرقم ١ له زاوية واحدة، ورقم ٢ له زاويتان، ورقم ٣ له ثلاث زوايا، ورقم ٤ له أربع زوايا ... وهكذا إلى رقم ٩، فكان صورة هذه السلسلة هكذا:



(١) محمد عبد الرحمن مرحبا، الموجز فى تاريخ العلوم عند العرب، ط بيروت، ١٩٧٠، ص ص ١٢١-١٢٢.

(٢) سميت بالغبارية لأن العرب كانوا يسطون الغبار (التراب) على لوح من الخشب ثم يرسمون عليه هذه الأعداد .

واستمر العرب فى تهنيز هذه الأرقام وتطوير رسمها حتى اتخذت شكلها الحالى:

1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6 ، 7 ، 8 ، 9 وعُرفت باسم الأرقام العربية وساد استعمالها فى بلاد المغرب العربى.

ومن الواضح أن سلسلة الأعداد الهندية، والأعداد الغبارية العربية تقف عند الرقم (9). وقد تفتت العقليّة الإسلامية الابتكارية عن إضافة الصفر فى العمليات الحسابية فى السلسلتين، فرمzوا للصفر فى سلسلة الأرقام الهندية بشكل النقطة (.) ورمzوا له فى سلسلة الأرقام الغبارية العربية بشكل دائرة فارغة (0). وإبان اتصال الغرب بالعلوم العربية الإسلامية ابتداءً من الأندلس، وجد الغربيون أن سلسلة الأرقام الغبارية العربية المستعملة فى المغرب أنسب لهم فى الاستعمال من الأرقام الرومانية، ومازال العالم يستعمل هذه الأرقام باسم الأرقام العربية.

هناك رأى يذهب إلى أن الهنود هم الذين ابتكروا الصفر، إلا أن هذا الرأى يفتقد إلى الأدلة الدامغة، ويقابله الرأى المؤيد بأن العرب هم فى الفترة الواقعة بين منتصف القرن الثالث الميلادى والقرن السادس المسلاذى، أى قبل بعثة الرسول (صلى الله عليه وسلم)، وذلك فى أول عهدهم بتعلم الكتابة العربية، وفى هذه الفترة أيضاً حول العرب صورة الخط النبطى البحتة وهى نفس صورة الأرقام الغبارية إلى صورته الحالية، فاستخدم العرب الصفر فى صورة نقطة، ولا يخفى ما للنقطة من أهمية فى الكتابة العربية من حيث التمييز والضبط بين الحروف، ومن هنا أعطوها نفس الأهمية مع الأعداد لتعبر عن الصفر. ومما يؤيد ابتكار العرب للصفر واستخدامه فى كتاباتهم ما

عُثِرَ عَلَيْهِ حَدِيثاً مِنْ نَقْشِ مَوْرخ بِسَنَةِ 328م اِكْتَشَفَهُ الْعَالَمُ الْأَثَرِي الْفَرَنْسِي
رَيْنِيَه دُوسُو (ت 1958) بِرَأْسِ شَمْرَا جَنْوَبِ سُورِيَا، يَحْتَوِي عَلَى الْخَطِ
النَّبَطِيِّ مَقْرُوناً بِالنَّقْطَةِ الَّتِي تُعْبَرُ عَنْ الصَّفَرِ.

باب فى

طبقات علماء الرياضيات
فى الحضارة الإسلامية

الفصل الأول

الخوارزمي

أبو عبدالله محمد بن موسى (182-232هـ / 798-846م)،
والخوارزمي نسبة إلى خوارزم من أعمال روسيا حالياً، والتي ولد بها، ونشأ
الخوارزمي في إقليم "خوارزم"، وكان هذا الإقليم من أعظم مراكز الثقافة
الإسلامية، حيث كانت خوارزم سوقاً للحركة العلمية، وفيها نشأ كثير من
العلماء الذين اتصلوا ببית الحكمة المأموني ببغداد، وقد توافرت للخوارزمي
كل الأسباب التي جعلته ينال حظاً وافراً من العلوم الرياضية والفلكية.

يُعد الخوارزمي أول من كتب في علم الجبر والمقابلة بحسب ابن
خلدون الذي يصنفه ضمن فروع الحساب. ومع أن الخوارزمي قد اشتهر
بأعماله الرياضية أكثر من الفلكية، إلا أننا نجد بعض كتب التراجم تذكر
شهرته الفلكية فقط. فابن النديم⁽¹⁾ يروي أنه كان منقطعاً إلى خزانة الحكمة
للمأمون، وهو من أصحاب علوم الهيئة، وكان الناس قبل الرصد وبعده
يعولون على زيجه الأول والثاني، ويعرفان بالسندهند. وله من الكتب: كتاب
الزيج نسختين أولى وثانية، كتاب الرخامة، كتاب العمل بالإسطرلاب، كتاب
عمل الإسطرلاب، كتاب التاريخ.

أما القفطي⁽²⁾ فنراه - كعادته - ينقل من الفهرست نقلاً حرفياً؛ ولم
يزد على كلام ابن النديم سوى، كتاب الجبر والمقابلة للخوارزمي، والذي لم
يذكره ابن النديم، فضلاً عن عدم ذكره لكتبه في الحساب.

أما المسعودي⁽³⁾ فيصنف الخوارزمي ضمن المؤرخين الذين ألفوا كتباً

(1) الفهرست، طبعة القاهرة القديمة 1948، ص383.

(2) إخبار العلماء بأخبار الحكماء، طبعة القاهرة 1326هـ، ص187-188.

(3) مروج الذهب ومعادن الجوهر، دار الأندلس، ط الأولى، بيروت 1965، ج1،

فى التاريخ والأخبار ممن سلف وخلف.

واللافت للنظر فى كلام ابن النديم، والقفطى، والمسعودى، أنه لم يشتمل على أية كتب فى الجبر والحساب، مع أن شهرته الرياضية فاقت شهرته الفلكية التى تحدث عنها صاحب الفهرست، وصاحب الأخبار، وشهرته التاريخية التى قال بها صاحب المروج. ومثل هذا الأمر يجعلنا نتوخى التدقيق والتحصيص فى تعاملنا مع كتب التراجم التراثية.

وإذ انتقلنا إلى المؤرخين المحدثين، وجدنا كارل بروكلمان يذكر أن أقدم مؤلف له بأيدينا كتاب فى علم الرياضيات هو أبو عبدالله محمد بن موسى الخوارزمى الذى عمل فى "بيت الحكمة" فى عهد الخليفة المأمون، وتوفى بعد سنة 232هـ حسبما ذكر نيلينو. وقد ألف للمأمون موجزاً فى علم الفلك الهندى يعرف بالسندهند، وتصحيحاً للوحات بطليموس، ولكن لم يكتسب شهرة كبيرة إلا بكتابه فى "الجبر" الذى ابتكر تسميته بذلك، وكتابه فى الحساب، وقد ترجما إلى اللاتينية فى زمن مبكر، وظلا فى أوروبا أساساً لعلم الحساب حتى عصر النهضة⁽¹⁾.

المهم أن الخوارزمى بعد أن حصلَ قدرًا كبيراً من علوم الرياضيات والفلك فى "خوارزم"، فكر فى الانتقال إلى بغداد عاصمة الدولة والخلافة، وفيها يقيم الخليفة، وهى مطمع أنظار العلماء النابهيين، وليس بعيداً أن يكون المأمون، وهو الشغوف بحب العلماء قد عرف الكثير عن عبقرية الخوارزمى، فبعث إليه يستقدمه إلى بغداد، ولم يجد الخوارزمى صعوبة فى الاتصال بهذا

(1) كارل بروكلمان، تاريخ الأدب العربى الترجمة العربية، الهيئة المصرية العامة للكتاب،

1990، 2 / 558 - 559.

الخليفة المحب للعلم، فولاه منصباً كبيراً فى بيت الحكمة، ثم أوفده فى بعض البعثات العلمية إلى البلاد المجاورة ومنها بلاد الأفغان، وكان الهدف من هذه البعثات هو القيام بالتحقيقات العلمية والبحث والدرس، والاتصال بعلماء تلك البلاد وزيارة مكتباتها والحصول على أنفس الكتب والمخطوطات⁽¹⁾. ولعل ذلك الاهتمام العلمى هو ما قد ميز العصر الذهبى للإسلام حيث اختص بكثير من الخلفاء والأمراء الذين شجعوا الحركة العلمية وهبوا الجو المناسب لازدهار العلم وإبداع العلماء فأنشأوا المدارس والمكتبات ودور العلم، وجدوا واجتهدوا فى البحث عن الكتب القديمة القيمة والمخطوطات، فحصلوا عليها وتنافسوا فى تقدير العلم واجتذاب العلماء. وكان العلماء على مستوى الأمة الإسلامية يتمتعون بالحصانة والحرية ولا يتأثرون بالخلافات السياسية أو الطائفية، ويعتبر الشعور بالأمان والاستقرار الذى أحسه العالم فى مزاولة عمله من أهم مظاهر الحركة العلمية فى عصر الإسلام الذهبى. وقد أدت تلك العوامل مجتمعة إلى وجود البيئة العلمية الصالحة لنشأة العلم وتطوره⁽²⁾.

وقد ذكرت معظم كتب التراجم، وكذلك كل الذين كتبوا عن الخوارزمى من شرييين وغريبين أنه كان منقطعاً إلى بيت الحكمة المأمونى منذ قدومه بغداد، ممارساً للنشاط العلمى بكل مظاهره، حتى ولاء المأمون رئاسة البيت، وفيه وضع معظم مؤلفاته.

(1) محمد عاطف البرقوقى، وآخرون، الحوارمى العالم الرياضى الفلكى، الدار القومية للطباعة والنشر، بدون تاريخ، ص98.

(2) أحمد فؤاد باشا، التراث العلمى للحضارة الإسلامية ومكانته فى تاريخ العلم والحضارة، دار المعارف، القاهرة 1993، ط الأولى، ص34.

وإذا كانت شهرة الخوارزمي ترجع إلى ابتكاره علم الجبر، إلا أنه أجاد في علوم الفلك والتاريخ والجغرافيا، ويتضح ذلك من الوقوف على مؤلفاته، ومنها: رسالة برهان نظرية فيثاغورث، رسالة العمليات الحسابية الأربع على الكميات الصم، رسالة جمع المقادير الجبرية وطرحها وضربها وقسمتها، رسالة النسبة التقريبية وقيمتها الرياضياتية، رسالة الوحدة المستعملة في المساحات والحجوم، كتاب التاريخ، كتاب الجبر والمقابلة، كتاب الجمع والتفريق، كتاب رسم الربع المعمور، كتاب زيج الخوارزمي الأول، كتاب زيج الخوارزمي الثاني، كتاب جداول للنجوم وحركتها، كتاب صورة الأرض وجغرافيتها، كتاب صورة الأرض في المدن والجزر والأنهار، كتاب صنع الاسطرلاب، كتاب طريقة معرفة الوقت بواسطة الشمس، كتاب المعاملات، كتاب هيئة الأرض، كتاب الوصايا.

ويُعزى إلى المسلمين الفضل في اختراع علم الجبر والذي ارتبط باسم العالم الشهير الخوارزمي. إذن لم يكن علم الجبر معروفاً بالصورة التي نتى نعرفها الآن عند الأمم السابقة، وبذلك يبطل الزعم بأن اليونانيين قد قدموا تحليلاً دقيقاً لعلم الجبر استناداً إلى كتاب "صناعة الجبر" لذيوفنطس (ديافانتوس) الذي يقول عنه القفطي⁽¹⁾: "اليوناني الإسكندراني فاضل كامل مشهور في وقته وتصنيفه، وهو صناعة الجبر كتاب مشهور مذكور خرج إلى العربية، وعليه عمل أهل هذه الصناعة. وإذا تبجره الناظر رأى بحراً في هذا النوع"، ويحتوى هذا الكتاب على ثلاث عشرة مقالة، ولم يصل إلينا منه إلا المقالات الست الأولى، وما جاء في هذه المقالات، وما كتب لها من شروح

(1) الأخبار، ص126.

وتعليقات فيما بعد لا يضع أمامنا صورة كاملة أو مخططاً كاملاً لعلم الجبر.

ويُعد الخوارزمي كذلك أول من طور فن الحساب، وجعل منه فناً صالحاً للاستعمال اليومي، ومفيداً لبقية العلوم، بعد أن وسع فيه ونظمه تنظيمًا دقيقاً⁽¹⁾ ويعد الخوارزمي بحق مثلاً رائداً في الرياضيات وفي الجبر بصفة خاصة، فهو أول ممن أطلق مصطلح الجبر الذي أخذ عنه الأوربيون الكلمة الإنجليزية Algebra . ولقد ظل الخوارزمي موضع اهتمام الأوربيين، بل واعتمدوا عليه في كثير من أبحاثهم ونظرياتهم، بحيث يمكن القول بأن الخوارزمي وضع علم الجبر وعلم الحساب للناس أجمعين⁽²⁾ على ما سنرى في الفقرات التالية.

صيغت كلمة "الجبر" لأول مرة في التاريخ لعلم لم تتأكد استقلاليتها بالاسم الذي خصّ به فقط، بل ترسخ كذلك مع تصور لمفردات نقدية مُعدة للدلالة على الأشياء والعمليات، ففي أيام الخليفة المأمون في الثلث الأول من القرن الثالث الهجري / التاسع الميلادي، بزغ علم جديد في الرياضيات وكانت الولادة حقيقية، كتاباً واسماً خاصين. فقد كتب أبو جعفر محمد بن موسى الخوارزمي مؤلفه الشهير "الكتاب المختصر في الجبر والمقابلة"⁽³⁾.

(1) زيجرد هونكه، شمس تسطع على الغرب، ترجمة فاروق بيضون، كمال دسوقي،

مراجعة فاروق عيسى الخوري، بيروت، ط الثانية 1969، ص158.

(2) ماهر عبد القادر محمد، التراث والحضارة الإسلامية، دار المعرفة الجامعية،

الإسكندرية 1989، ص80.

(3) رشدي راشد، تاريخ الرياضيات العربية، مركز دراسات الوحدة العربية، بيروت

1989، ص20.

يُعرف علم الجبر بأنه: إضافة شيء إلى كمية معلومة أو ضربه بها حتى يصير أحدهما مساوياً للآخر، ومن هذا التعريف يتضح أن القصد منه هو العمليتان الجبريتان التاليتان:

$$م + س = ب$$

$$م س = ب$$

وانتشر تطبيق هاتين العمليتين فصارتا تعنيان موضوع الجبر كله وهو ذلك الفرع من التحليل الرياضى الذى يناقش الكميات باستخدام حروف ورموز عامة، ويعرف الجبر بالقاموس الرياضياتى بأنه تعميم لعلم الحساب، أى أن الحقائق الحسابية مثل $3 \times 3 = 3 + 3 + 3$ ، $4 \times 5 = 4 + 4 + 4 + 4 + 4$ ، الخ، وكلها حالات خاصة من الحالات العامة الجبرية مثل $س + س + س + 4 = س$ حيث $س$ هى أى عدد.

ويبتدئ الخوارزمى كتابه الجبر والمقابلة ببيان الغاية والهدف من علم الجبر، ومدى نفعه للناس فيما يحتاجون إليه من الحساب، فيقول: "إنى لما نظرت فيما يحتاج إليه الناس من الحساب وجدت جميع ذلك عدداً، ووجدت جميع الأعداد إنما تركبت من الواحد، والواحد داخل فى جميع الأعداد. ووجدت جميع ما يلفظ به من الأعداد ما جاوز الواحد إلى العشرة يخرج مخرج الواحد ثم تنتهى العشرة وتثلث كما فعل الواحد فيكون منها العشرون والثلاثون إلى تمام المائة. ثم تنتهى المائة وتثلث كما فعل بالواحد وبالعشرة إلى الألف، ثم كذلك تردد الألف عند كل عقد إلى غاية المدرك من العدد⁽¹⁾.

(1) الخوارزمى، كتاب الجبر والمقابلة، تحقيق على مصطفى مشرفة، ومحمد مرسى أحمد، ملحق بكتاب ماهر عبد القادر محمد، التراث والحضارة الإسلامية، م. س، ص 228.

ويقرر الخوارزمي في كتابه قاعدة هامة من قواعد البحث العلمي، وهي قاعدة اتصال العلماء على مر العصور "فلم يزل العلماء في الأزمنة الخالية والأمم الماضية يكتبون الكتب مما يصنفون من صنوف العلم ووجوه الحكمة نظراً لمن بعدهم واحتساباً للأجر بقدر الطاقة"⁽¹⁾.

ويصنف الخوارزمي العلماء والباحثين - كل في تخصصه - إلى ثلاثة أصناف لا يخرج أي باحث علمي عن أحدهم، وهم "إما رجل سبق إلى ما لم يكن مستخرجاً قبله فورثة من بعده. وإما رجل شرح مما أبقي الأولون ما كان مستغلقاً فأوضح طريقه وسهل مسكله وقرب مأخذه. وإما رجل وجد في بعض الكتب خللاً فلم شعثه وأقام أوده وأحسن الظن بصاحبه غير راد عليه ولا مفتخر بذلك من فعل نفسه"⁽²⁾.

وبهذا يكون الخوارزمي - من خلال مقدمته الموجزة لكتاب الجبر والمقابلة - قد وضع فلسفة التأليف العلمي في عصره بكل جلاء ووضوح، وبين ملامح الشخصية العلمية في عصر النهضة الإسلامية متمثلة في التحلي بأنبل الصفات وضرب المثل الأعلى في حب العلم والمثابرة على البحث العلمي والترفع عن بعض الصغائر، والاجتهاد في كشف أسرار العلم والتمسك بالأمانة العلمية عند النقد أو النقل⁽³⁾.

وهذه القواعد التي وضعها الخوارزمي إنما تتفي ما يتسرب إلى بعض الأذهان من أن العرب كانوا يكشفون من أسرار العلم بقدر ما تدعو إليه

(1) الخوارزمي، كتاب الجبر والمقابلة، ص 227.

(2) الخوارزمي، نفس المصدر، نفس الصفحة.

(3) أحمد فؤاد باشا، مرجع سابق، ص 55.

حاجتهم فى حياتهم المعيشية، والحقيقة أن المسلمين كانوا يشتغلون إلى جانب ذلك بالبحث العميق وتحقيق قضايا العلم، بدافع الحب الحقيقى للعلم ذاته، ويكفى دليلاً على ذلك أنهم ترجموا كتباً للفلسفة اليونانية وغيرها من مراجع العلم الأجنبى، وراجعوا هذه الترجمات عدة مرات بقصد التثبت من أنها صورة دقيقة لما فى مراجعها الأصلية، ثم قيامهم بتصحيح كثير من الآراء اليونانية وغيرها، ثم ابتكارهم كثيراً من الآراء والنظريات العلمية الجديدة التى لم تكن معروفة من قبل، فلقد جمع المسلمون إذن بين البحث العلمى لترفيه حياتهم والارتفاع بمستواها، وبين كشف حقائق الوجود، ومعرفة أسرار الطبيعة⁽¹⁾. ويعتبر الخوارزمى بمؤلفاته - خاصة كتاب الجبر والمقابلة - من أوضح الأمثلة على ذلك.

لكن ما الدافع وراء ابتكار الخوارزمى لعلم الجبر؟ الواقع أن الذى دفع الخوارزمى إلى ذلك هو علم الميراث المعروف بعلم الفرائض، فأراد أن يبتدع طرقاً جبرية تسهل هذا العلم الشائك. وبذلك يكون الخوارزمى قد انطلق من شريعته الإسلامية واتخذها حافزاً له - وهى هكذا دائماً - فى تأليف "الكتاب المختصر فى حساب الجبر والمقابلة". فأدخل الممارسات الحسابية للفقهاء فيما أسسه كنظرية وهو مجال الحسابات على المجاهيل، فكثير من المسائل يتطلب حلها التعامل مع الكميات المجهولة جنباً إلى جنب مع الكميات المعلومة.

ولقد أوضح الخوارزمى فى كتابه هذا أكثر المسائل المتعلقة بالجبر الحديث من معادلات وجذور وكسور .. إلخ، بل وشرح ما يسمى بلغة الرياضيات الحديثة الجذر الذى يحتوى على كمية تخيلية (مستحيلة) مثل

(1) راجع البرقوقى، وآخرون، الخوارزمى .. ص 104.

قسّم الخوارزمي الأعداد التي يحتاج إليها في حساب الجبر والمقابلة إلى ثلاثة ضروب: وهي جذور وأموال وعدد مفرد لا ينسب إلى جذور ولا إلى مال⁽¹⁾.

والجذر يعنى "س"، والمال يعنى "س²"، والمفرد يعنى الحد الخالى من س. يقول الخوارزمي: "واعلم أنك إذا نصفت الأجذار فى هذا الباب وضربتها فى مثلها فكان مبلغ ذلك أقل من الدراهم التى مع المال"، فالمسألة مستحيلة⁽²⁾. فهذا النص يشير إلى أن الخوارزمي قد تنبه إلى الحالة التى يكون فيها الجذر كمية تخيلية بلغة الرياضيات الحديثة، فأشار إلى الحالة التى يستحيل فيها إيجاد قيمة حقيقية للمجهول، فقال: فى هذه الحالة تكون المسألة مستحيلة، أو تخيلية.

فمن الأبواب التى يحتويها كتاب الجبر والمقابلة، باب الضرب والذى يبين فيه كيفية ضرب الأعداد والأشياء والجذور بعضها فى بعض. يقول الخوارزمي: اعلم أنه لا بد لكل عدد يضرب فى عدد من أن يضاعف أحد العددين بقدر ما فى الآخر من الأحاد...⁽³⁾. وفيه باب الجمع والنقصان والقسمة، يعرض للعمليات الخاصة وقسمة المقادير الجبرية وطرحها وقسمتها. "اعلم أن جذر مائتين إلا عشرة مجموع إلى عشرين إلا جذر مائتين فإنه عشرة سوياً. وجذر مائتين إلا عشرة منقوص من عشرين إلا جذر مائتين فهو

(1) الخوارزمي، كتاب الجبر والمقابلة، ص ص 228 - 229.

(2) الخوارزمي، كتاب الجبر والمقابلة، ص 233.

(3) الخوارزمي، كتاب الجبر والمقابلة، ملحق بكتاب الموجز فى تاريخ العلوم عند العرب للدكتور مرحبا، ص 270.

ثلاثون إلا جذرى مائتين .. وإن أردت أن تقسم جذر تسعة على جذر أربعة، فإنك تقسم تسعة على أربعة فيكون اثنين وربعاً، فجذرها هو ما يصيب الواحد، وهو واحد ونصف⁽¹⁾.

ثم باب المسائل (المعادلات) الست، ثم باب المسائل المختلفة، وهى تدور حول تكوين معادلات من الدرجة الثانية وكيفية حلها. وهذه المسائل قريبة الشبه جداً بما فى كتب الجبر الحديثة. أما المعادلات التى قسمها الخوارزمى إلى ستة ضروب أو أقسام، فيمكن الإشارة إليها فيما يلى⁽²⁾:

1- الأموال التى تعدل الجذور، ومثالها القول: مال يعدل خمسة أجزاره فجذر المال خمسة، والمال خمسة وعشرون، وهو مثل خمسة أجزاره.

2- الأموال التى تعدل العدد، ومثالها القول: مال يعدل تسعة فهو المال وجذره ثلاثة. وكالقول: خمسة أموال تعدل ثمانين فالمال الواحد خمس الثمانين وهو ستة عشر.

3- الجذور التى تعدل عدداً، ومثالها القول: جذر يعدل ثلاثة من العدد، فالجذر ثلاثة والمال الذى يكون منه تسعة.

4- الأموال والجذور التى تعدل عدداً، ومثالها القول: مال وعشرة أجزار يعدل تسعة وثلثين درهماً، ومعناه أى مال إذا زادت عليه مثل عشرة أجزار بلغ ذلك كله تسعة وثلثين.

5- الأموال والعدد التى تعدل جذوراً، ومثالها القول: مال وأحد وعشرون

(1) الخوارزمى، نفس المصدر، ص 270 - 272.

(2) الخوارزمى، كتاب الجبر والمقابلة، ص 229 - 233.

من العدد يعدل عشرة أجزاره، ومعناه أى مال إذا زدت عليه واحداً وعشرين درهماً، كان ما اجتمع مثل عشرة أجزار ذلك العدد.

6- الجذور والعدد التى تعدل الأموال، ومثالها القول: ثلاثة أجزار وأربعة من العدد تعدل مالاً.

وأورد الخوارزمى مسائل الست كما يلى:

$$\text{م 1 : س}^2 + 10\text{س} = 39$$

$$\text{م 2 : س}^2 + 10\text{س} = 48 \text{ تؤول إلى س}^2 + 5\text{س} = 24$$

$$\text{م 3 : س}^2 + 5\text{س} = 28 \text{ تؤول إلى س}^2 + 10\text{س} = 56$$

$$\text{م 4 : س}^2 + 21 = 10\text{س}$$

$$\text{م 5 : س}^2 = 3\text{س} + 4$$

م 6 : يضرب لها أمثلة عدة، ومنها:

$$\text{س}^2 = 5\text{س} \text{ تؤول إلى س} = 5, \text{س}^2 = 25$$

$$\text{س}^2 = 10 \text{ تؤول إلى س} = 20, \text{س}^2 = 400$$

$$\text{س}^2 = 4 \text{س} \text{ تؤول إلى س}^2 = 12\text{س}, \text{س} = 12, \text{س}^2 = 144$$

$$\text{س}^2 = 9 \text{ تؤول إلى س} = 3$$

$$\text{س}^2 = 80 \text{ تؤول إلى س}^2 = 16$$

وهذه الضروب الستة من المعادلات يعبر عنها باللغة الجبرية الحديثة

كما يلى :

$$\text{م س}^2 = \text{ب س}$$

$$\text{م س}^2 = \text{ج}$$

$$\text{ب س} = \text{ج}$$

$$\text{م س}^2 + \text{ب س} = \text{ج}$$

$$\text{م س}^2 + \text{ج} = \text{ب س}$$

$$\text{ب س} + \text{ج} = \text{م س}^2$$

ثم قدم الخوارزمي حلاً لكل ضرب من هذه الضروب الستة بذكر أمثلة توضيحية مفصلة خالية من استعمال الرموز، الأمر الذي تطلب منه جهداً كبيراً في حل مثل هذه المسائل الجبرية. يقول الخوارزمي: "مالان وعشرة أجزار تعدل ثمانية وأربعين درهماً"⁽¹⁾. وهو يقدم طريقة الحل على هذا النحو: "ومعناه، أى مالين إذ جمعا زد عليهما مثل عشرة أجزار أحدهما، بلغ ذلك ثمانية وأربعين درهماً. فينبغي أن ترد المالين إلى مال واحد، وقد علمت أن مالاً من مالين نصفهما، فاردد كل شيء في المسألة إلى نصفه، فكأنه قال: مال وخمسة أجزار يعدل أربعة وعشرين درهماً، ومعناه، أى مال إذا زدت عليه خمسة أجزاره، بلغ ذلك أربعة وعشرين. فنصف الأجزاء فتكون اثنين ونصفاً، فاضربهما في مثلها فتكون ستة وربعاً، فزدها على الأربعة والعشرين، فتكون ثلاثين درهماً وربعاً، فخذ جذرها وهو خمسة ونصف فانقص منها نصف الأجزاء، وهو اثنان ونصف، يبقى ثلاثة، وهو جذر المال، والمال تسعة.

(1) الخوارزمي، كتاب الجبر والمقابلة، ص 231.

توضح هذه المسألة ما كان يعانيه الخوارزمي وغيره من علماء العرب والمسلمين في حل المعادلات الجبرية، ويتضح هنا أيضاً أهمية التعبير بالرموز في تبسيط العمليات الجبرية والرياضياتية وتسهيلها بصفة عامة، ويتضح ذلك من حل مثال الخوارزمي السابق بالرموز فيما يلي:

$$2 \text{ س} + 10 \text{ س} = 48$$

$$\text{أى أن س}^2 + 5 \text{ س} = 48$$

$$\square \text{ س} = \sqrt{\frac{5}{2} - 24 + 2 \frac{5}{2}} = \frac{5}{2} - \frac{11}{2} = 3$$

وهذا هو جذر المال والذي هو $\text{س}^2 = 9$.

قدم الخوارزمي (خوارزمية) لحل مسائل جبرية، ومحاولته هي الأولى المكرسة للحساب الجبري بإيراد كل معادلة إلى شكلها المنتظم المتكافئ، فيقصد الخوارزمي بفكرة الجبر نظرية المعادلات الخطية والتربيعية ذات المجهول الواحد، وحساب أولى على ثنائيات الحد، وثنائيات الحدود المترافقة معها، ويجب أن يكون الحل عاماً وقابلاً للحساب⁽¹⁾.

ثم يذكر الخوارزمي بعد ذلك باب المعاملات، فيقول: واعلم أن معاملات الناس كلها من البيع والشراء والصرف والإجارة وغير ذلك على وجهين بأربعة أعداد تلفظ بها المسائل، وهى: المسعر، والسعر، والتمن، والتمن. ويشرح معانى هذه الكلمات شرحاً وافياً، ثم يعرض بعد ذلك مسائل مما يجرى فى حياة الناس من بيع وإيجارات، وما يتعاملون به من صرف، وكين، ووزن، والغاية من ذلك واضحة، وهى تعليم الناس كيف يتصرفون

(1) راجع، رشدى راشدى، تاريخ الرياضيات العربية، ص 28، 29.

تصرفاً عادلاً فى قضاء حاجاتهم التى تتعلق بهذه النواحي، وكيف يعاملون بعضهم بعضاً معاملة قائمة على التقدير السليم والوزن الدقيق.

وبالإضافة إلى ما سبق فقد أوجد الخوارزمى الأحجام لبعض الأجسام الهندسية البسيطة كالحرم الثلاثى، والحرم الرباعى والمخروط. وكان حل المعادلات التكعيبية بواسطة مقطوع المخروط من أعظم الأمور التى أتى بها، وعملت على تطور علم الجبر الذى وضعه.

والخوارزمى أيضاً هو أول من وضع كتاباً فى الحساب، وهو الأول من نوعه من حيث الترتيب والتبويب والمادة. وقد ترجمه إلى اللاتينية أو لاردبات، وبقي زمناً طويلاً مرجع العلماء، وبقي عدة قرون معروفاً باسم "الغوريتمى" نسبة إلى الخوارزمى.

تلك كانت أهم إنجازات الخوارزمى الرياضياتية، وخاصة فى علم الجبر الذى يعد هو مبتكره الأول، وللوقوف على أهمية هذه الإنجازات، علينا أن نتتبع تأثيرها فى الرياضيين اللاحقين لصاحبها، وأثرها فى الغرب بصفة خاصة، وفى تاريخ علم الرياضيات بصفة عامة، ويمكن البحث فى هذا الموضوع فى الفقرات التالية:

مع أن الظاهر على علماء الرياضيات فى عصر الخوارزمى أن كلاً منهم قد مارس العلم بصورة فردية، إلا أن المعرفة العلمية للعصر كله تعتبر محصلة نهائية للعمل الجماعى. وكان للخوارزمى فيها النصيب الأكبر، ولمعرفة أبعاد الإنجاز الذى تم فى ذلك العصر، علينا أن نتتبع التطور العلمى للرياضيات، وخاصة علم الحساب والجبر. ومما لاشك فيه أن معرفتنا بهذه الأبعاد سوف تؤدي بالضرورة إلى معرفة الإضافات التى أضافها كل عالم بعد

الخوارزمي، ومدى اسهامها في المنظومة الجماعية لتطور الرياضيات في عصر الخوارزمي.

إن لكتاب الجبر والمقابلة للخوارزمي شأناً كبيراً، إذ أن كل ما ألفه العلماء فيما بعد كان مبنياً عليه، فقد بقي عدة قرون مصدراً اعتمد عليه العلماء في بحوثهم الرياضياتية.

ويعتبر سنان بن الفتح الحرّاني الحاسب الذي ظهر في أوائل القرن الثالث الهجري أول من تأثر بالخوارزمي، حيث كان معاصراً له، درس كتابه الجبر والمقابلة ووعاه جيداً. وما أن اكتمل نضجه العلمي حتى شرح هذا الكتاب وسمى عمله العلمي هذا، كتاب "شرح الجبر والمقابلة" للخوارزمي. وقد صار بذلك مقدماً في صناعة الحساب والأعداد. وقدم من الكتب غير الشرح السابق: كتاب "التخت في الحساب الهندي"، كتاب "الجمع والتفريق"، كتاب "شرح الجمع والتفريق"، كتاب "الوصايا"، كتاب "حساب المكعبات"⁽¹⁾.

ويصرح ابن الفتح بفضل الخوارزمي عليه في كتابه "الكعب والمال والأعداد المتناسبة"، حيث قال في بدايته: إن جل معرفة الحساب هو النسبة والتعديل. وقد وضع محمد بن موسى الخوارزمي كتاباً سماه "الجبر والمقابلة" وقد فسر ذلك، وسمح لنا بعد تفسيره بابا ننشعب على قياسه، يقال له: باب الكعب، ومال المال، والمداد، ولم نر أحداً من أهل العلم مما سبقنا وانتهى إلينا خبره، وضع في ذلك عملاً أكثر من التسمية، فأحببنا أن نضع في ذلك كتاباً يبين فيه مذهب قياسه.

(1) ابن النديم، الفهرست، ص392.

وإذا كان ابن الفتح قد عاصر الخوارزمي واستفاد من أعماله وأعلن أنها قد فتحت له أبواباً جديدة في البحث الرياضي، فإن ثابتاً بن قرة (221-228هـ / 835-900م) قد التقى بالخوارزمي، وقرأ وتعلم عليه في داره ثم أوصله الخوارزمي بالخليفة المعتضد وأدخله في جملة المنجمين.

إن كانت هناك صلات علمية بين ابن قرة والخوارزمي، فالأول تعلم على الثاني، وذلك إنما يكشف لنا عن طبيعة النشاط العلمي الجماعي الذي مارسه الخوارزمي. ويتضح أثر الأستاذ في التلميذ من أن الأخير "قد وضع كتاباً في الجبر بيّن فيه علاقة الجبر بالهندسة، وكيفية الجمع بينهما.

إن تأثر ثابت بالعصر الذي عاش فيه واتصل ببعض معاصريه من العلماء الرياضيين، ودرس ما عندهم. كما قرأ لمن لم يعاصره من العلماء السابقين، يشهد بذلك ما قدمه من إسهامات رياضية تعتبر تكملة لأعمال من سبقه من العلماء، وخاصة الخوارزمي. وقد مثلت إضافات ذات تطوراً هاماً لعلم الجبر، إذ أنه "كان أول من أدرك انطباقه على الهندسة.

وفي نفس عصر الخوارزمي (القرن الثالث الهجري) نبغ عالم رياضي آخر تتلمذ على كتب الخوارزمي، وكان يفتخر بذلك، وهو أبو كامل شجاع بن أسلم المصري من أهالي مصر، نبغ في الجبر وحاز شهرة عظيمة فيه إلى الدرجة التي لقب معها بأستاذ الجبر.

يذكر ابن النديم⁽¹⁾ أن أبا كامل من علماء القرن الثالث الهجري، ومن أهالي مصر، كان فاضلاً وحاسباً وعالماً. وكان أبو كامل من العلماء الذين

(1) الفهرست، ص 374.

يفخرون بتعلمهم العلوم على علماء العرب والمسلمين، فكان فخوراً بأنه تتلمذ على كتب علامة الإسلام في الجبر محمد بن موسى الخوارزمي.

يكشف كلام ابن النديم هذا عن بنية العلاقة العلمية التي تمت بين الخوارزمي، وأبي كامل المصري، من خلال تعلم الثاني على كتب الأول، والتي يبدو أنه أتقنها حتى صار فخوراً بتعلمه عليها.

ويعترف أبو كامل المصري نفسه بفضل الخوارزمي عليه، فيذكر في مقدمة كتابه الذي أسماه أيضاً "الجبر والمقابلة" أن كتاب محمد بن موسى الخوارزمي المعروف بكتاب الجبر والمقابلة أصح الكتب الرياضياتية أصلاً، وأصدقها قياساً، وكان مما يجب علينا من التقدم، الإقرار له بالمعرفة والفضل، إذ كان السابق إلى كتاب الجبر والمقابلة والمبتدئ له والمخترع لما فيه من الأصول التي فتح الله لنا بها ما كان مستغلقاً .. وترك (مؤلفها) شرحها وإيضاحها، ففرغت منها مسائل كثيرة يخرج أكثرها إلى غير الضروب الستة التي ذكرها الخوارزمي في كتابه، فدعاني إلى كشف ذلك وتبيينه، فألفت كتاب الجبر والمقابلة وبينت شرحه في كتاب الارثماطيقى في الأعداد والجبر والمقابلة⁽¹⁾.

ويذكر بروكلمان معتمداً على الفهرست أن عبد الحميد بن واسع بن ترك أبو الفضل الخنثي الحاسب، له كتاب الجبر والمقابلة، مع أن ابن النديم ذكر للخنثي فقط، كتاب المعاملات، وكتاب الجامع في الحساب يحتوى على ستة كتب⁽²⁾.

(1) الفهرست، ص 391.

(2) بروكلمان 2 / 366.

لكن يبدو أن الكتاب الذى ذكره بروكلمان يقع ضمن كتاب الخُتلى الذى يحتوى على ستة كتب، حيث ذكر بروكلمان أن لكتاب الجبر والمقابلة للخُتلى مختصراً فى جاز الله تحت رقم 1505 / 2⁽¹⁾.

ويمتد تأثير الخوارزمى فيما تلا عصره من عصور، ففى القرن الخامس الهجرى نرى الكرخى (ت 421هـ / 1030م) يتبع الطريقة التحليلية لعلم الجبر والمقابلة مقتدياً بسلفيه الخوارزمى، وأبى كامل ... ويعتبر كتابه "الفخرى فى الحساب" أحسن كتاب فى الجبر فى العصور الإسلامية (الوسطى)، مستنداً على كتاب محمد بن موسى الخوارزمى (الجبر والمقابلة) .. وكان الكرخى من علماء المسلمين المبتكرين الذين يكرهون النقل والترجمة، ويفضل التصنيف والتحليل والتعليق على مؤلفات غيره. وقد شرح الكثير من النقط الغامضة فى "كتاب الجبر والمقابلة" للخوارزمى. وهنا يتضح التواصل العلمى بأجلى صورته، فمن الخوارزمى إلى أبى كامل الصمرى، ومن الاثنين إلى الكرخى، تشكل أعمالهم الثلاثة منظومة علمية تدل على تطور الرياضيات عند علماء المسلمين فى فترة هامة من فترات تاريخ العلم.

لكن هل توقف تأثير الخوارزمى عند علماء الرياضيات المسلمين فى العصور المختلفة، أم كان له دور فى تطور الرياضيات عند الأوربيين إبان نهضتهم المعروفة؟

الواقع أن أعمال الخوارزمى الرياضياتية، خاصة كتاب الجبر والمقابلة، كان لها شأن كبير ليس فقط على مستوى تاريخ العلم العربى الإسلامى، بل وعلى مستوى تاريخ العلم العالمى. فلقد كان هذا الكتاب بمثابة

(1) بروكلمان 2 / 367.

الينبوع الذى استقى منه علماء أوربا. يذكر "كريستوفر" فى كتابه "التقليد الإسلامى" أن الخوارزمى الذى عمل فى بيت الحكمة فى بغداد كتب كتاباً مهماً ومؤثراً فى علم الجبر، وأنه هو الذى أطلق على الزاوية مصطلح "الجيب" الذى تَرجَم إلى اللاتينية بالمصطلح "Simus"⁽¹⁾.

ويذكر أصحاب "تاريخ كمبردج للإسلام" أن الخوارزمى هو الذى اخترع كلمة "اللوغاريتم" وهو المسئول بصورة أساسية عن تأسيس علم الجبر الإسلامى⁽²⁾. وقد جاءت معرفة أوربا لكتاب الجبر والمقابلة عن طريق الترجمات اللاتينية التى وضعت له. فلقد تَرجَم جيرارد الكريمونى الأصل العربى لكتاب الجبر والمقابلة إلى اللغة اللاتينية فى القرن الثانى عشر للميلاد. وعرفت أوربا هذه الترجمة باسم: *Lulus algebrae et almucqraba le* . que

وقد تَرجَم الكتاب أيضاً روبرت الشسترى Robert of Chester سنة 1145م. وصارت هذه الترجمة أساساً لدراسات كبار علماء الرياضيات الأوربيين. مثل ليونارد فيبوناتسى Leonardo Fibonacci البيزى (ت بعد 1240م). وقد اعترف هذا العالم الرياضياتى بأنه مدين للمسلمين بالكثير حيث رحل إلى مصر وسوريا واليونان وصقلية، وتعلم هناك القواعد العربية فوجدها أدق وأسمى من قواعد فيثاغورث، ثم عمد إلى تأليف كتاب الحساب Liber abaci فى خمسة عشر فصلاً، منها بحث فى الحساب الجبرى. وقد

(1) Christopher, J. B., The Islamic Tradition, Harper & Row, Publishers, New York, 1972, P. 23- 24.

(2) Holt, P. M & Ann, K.S.L and Lewis; Bernard: The Cambridge History of Islamic Society and Civilization, Vol 28. Cambridge University, Press 1970, P. 748.

أورد البيزى الحالات الست لمعادلات الدرجة الثانية كما عرضها الخوارزمى⁽¹⁾. وهناك ماستر جاكوب Master Jacob من أهل فلورنسا الذى ألّف فى الحساب والجبر كتاباً تاريخه سنة 1307م يجمع كأحد كتب ليوناردو سة أنواع من المعادلات الرباعية التى كان الخوارزمى قد أوردها فى كتاب الجبر والمقابلة، والذى عرفت أوربا بواسطته مبادئ علم الجبر، ومعها لفظة "الجبر" نفسها. وإلى مصنغات الخوارزمى أيضاً يرجع الفضل فى نقل الأرقام الهندية - العربية إلى الغرب حيث سميت باسمه أول الأمر algorithms (الغوريتمى).

ثم جعل الألمان من الخوارزمى اسماً يسهل عليهم نطقه، فأسموه Algorismus ، ونظموا الأشعار باللاتينية تعليقاً على نظرياته. وما زالت القاعدة الحسابية (Algrithmus) حتى اليوم تحمل اسمه كرائد لها.

وقد نشر "فردريك روزن" كتاب الجبر والمقابلة سنة 1831م فى لندن، ونشر كارنيسكى ترجمة أخرى مأخوذة من ترجمة الشسترى سنة 1915.

من هنا يتضح أن أعمال الخوارزمى فى علم الرياضيات قد لعبت فى الماضى والحاضر دوراً مهماً فى تقدمه، لأنها أحد المصادر الرئيسة التى انتقل خلالها الجبر والأعداد العربية إلى أوربا .. فعلم الجبر من أعظم ما اخترعه العقل البشرى من علوم، لما فيه من دقة وأحكام قياسية عامة .. فالخوارزمى هو الذى وضع قواعده الأساسية وأصوله كما نعرفها اليوم.

(1) كارادى فو، الفلك والرياضيات، بحث ضمن تراث الإسلام، تأليف جمهرة من المستشرقين، تعريب وتعليق جرجيس فتح الله، ط الثانية، بيروت 1972، ص573-574.

من كل ما سبق نستطيع الزعم بأن الخوارزمي قد أسس مدرسة رياضية لعبت دوراً مهماً في تطور الرياضيات منذ أن بدأ صاحبها هذا التطور، وذلك عندما انتقل من الحساب إلى الجبر، والذي اعترف العالم بأنه واضعه الحقيقي. وعن طريق الخوارزمي تم الانتقال أيضاً من القيمة العددية البحتة للأعداد إلى علاقتها بعضها ببعض. وقد مثل هذا التطور الذي أحدثه الخوارزمي مقدمة معرفية لكل من جاء بعده من علماء الرياضيات إن على المستوى العربي، أو على المستوى العالمي، الأمر الذي يجعلنا نقرر أن كل علماء الرياضيات اللاحقين للخوارزمي، وقد أسسوا أبحاثهم بناءً على أعماله، إنما يعتبرون تلاميذ في مدرسته الرياضية الممتدة من القرن الثالث الهجري، وحتى العصر الحديث.

الفصل الثانى

ثابت بن قرة

ثابت بن قرة (221-288هـ / 835-900م) هو أبو الحسن ثابت بن قرة بن ثابت ... الحرائي الصابي، كان صيرفيا بحران، استصحبه محمد بن موسى بن شاكر لما انصرف من بلد الروم لأنه رآه فصيحا، فتعلم في داره، ثم أوصله بالمعتضد، وأدخله في جملة المنجمين. وكان ثابت حكيما في أجزاء علوم الحكمة، ولم يكن في زمانه من يماثله في صناعة الطب ولا في غيره من جميع أجزاء الفلسفة، فكان له براعة في المنطق والتنجيم والهيئة والحساب والهندسة. وذكر ابن جليل أن له كتباً كثيرة في هذه الفنون، ومنها كتاب مدخل إلى كتاب أقليدس عجيب، وهو - أي ثابت - من المتقدمين في علمه جداً. ويؤيد ذلك ما ذكره الشهرزوري من أنه جرى عند ثابت ذكر فيثاغورث وأصحابه، وتعظيم العدد الذي لا يفهم معناه، فقال: إن الرجل وشيعته أجل قدراً وأعظم شأناً من أن يقع لهم سهو أو خطأ في معرفة الأمور العقلية، فيجوز أن يكونوا قد وقفوا من طبيعة العدد على أسرار لم تنته إلينا لانقراضها.

وخلاصة القول في ثابت أنه قد بلغ في تحصيل العلوم شأناً عظيماً إلى الدرجة التي معها نال نبجيل وتوقير المعتضد له. وليس أدل على ذلك من أنه طاف معه في بستان ويد الخليفة على يد ثابت، فانتزع يده بغتة من يد ثابت، ففزع الأخير، فقال الخليفة: يا ثابت أخطأت حين وضعت يدي على يدك وسهوت، فإن العلم يعلو ولا يُعلى عليه. وكان ثابت يجلس بحضرته ويجادلّه طويلاً ويقبل عليه دون وزرائه وخاصته.

وكان ثابت بن قرة من مشاهير نقلة العلوم في الإسلام فكان جيد النقل إلى العربية حسن العبارة قوى المعرفة باللغة السريانية وغيرها ويشهد على

ذلك كثرة مصنفاته التي ورد ذكر أسمائها في معظم كتب التراث التي أرخت له. فذكر له ابن جُلجل كتاباً واحداً هو "مدخل إلى كتاب إقليدس"، وذكر له ابن النديم أربعة شعر كتاباً ورسالة وعدد له القفطى مائة وخمسة عشر كتاباً ورسالة. بينما انفرد ابن أبى أصبغة بإيراد ثبت مطول لأعمال ثابت بن قرة يشتمل على مائة وسبعة وأربعين مصنفاً وهذه المصنفات تشتمل على مؤلفاته الشخصية، وما قام بنقله من اليونانية والسريانية، وذلك في فنون شتى مثل الطب والرياضيات والفلسفة والفلك.

ويعد ثابت بن قرة تبعاً للكرادى فو - أعظم هندسى عربى على الإطلاق⁽¹⁾ وهو الذى ترجم الكتب السبعة من أجزاء المخروطات فى كتب أبلوليوس الثمانية إلى العربية فحفظ لنا بذلك ثلاثة كتب من مخروطات أبلولونيوس فقدت أصولها اليونانية وساعده بنوموسى فى ذلك، فقدموه إلى الخليفة المعتضد، فأكرم وفادته ... وكتب ثابت عدد من الرسائل فى الفلك والهندسة مبسطاً فيها ما غمض من الفكر والعبارات فى كتب الأقدمين مستنبطاً مسائل جديدة، فى الهندسة وعلم الحيل، وفى الجذور الصم التى بحثها على نمط إقليدس وأفلاطون.

فثابت بن قرة يُعد من أوائل علماء الحضارة الإسلامية الذين تصدوا للبرهنة على المصادرة الخامسة لإقليدس الخاصة بالخطوط المتوازية، بعد أن فشل علماء اليونان فى البرهنة عليها. ومما لاشك فيه أن هذه المصادرة تلعب دوراً مهماً فى علم الهندسة، وليس أدل على ذلك من أنها شغلت تفكير علماء الرياضيات منذ القرن الثالث قبل الميلاد وحتى القرن التاسع عشر الميلادى.

(1) كرادى فو، الفلك والرياضيات، م. س.، ص 577.

وقد تصدى علماء الحضارة الإسلامية للبرهنة على هذه المصادرة، وبذلوا جهوداً كبيرة في إثباتها أدت إلى ظهور الهندسات اللاإقليدية في العصر الحديث، تلك التي اقترنت بأسماء غربية، مع أن علماء الحضارة الإسلامية هم الرواد الأول لهذه الهندسات، ومنهم ثابت بن قرة الذي ساهم فيها ببرهانه على مصادرة إقليدس الخامسة. ففي رسالته في برهان المصادرة المشهورة من إقليدس، أتى ثابت بن قرة بمصادرة تنص على أنه إذا وقع خط مستقيم على خطين مستقيمين، وكان هذان الخطان يتقاربان في إحدى جهتيهما، فإنهما يتباعدان في جهتهما الأخرى، وإن تقاربهما من جهة التقارب، وتباعدهما من جهة التباعد يزيد بينهما. ثم بدأ البرهان على مصادرة إقليدس مستخدماً خمسة أشكال هي كما يلي⁽¹⁾:

الشكل الأول :

إذا وقع خط مستقيم على خطين مستقيمين وكانت الزاويتان المتبادلتان متساويتين، فإن ذلك الخطين لا يقربان ولا يبعدان في جهة من جهتيهما.

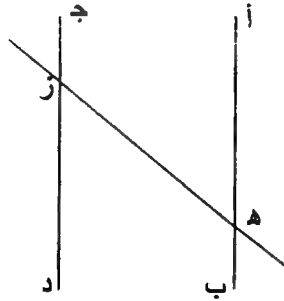
مثل خطي أ ب، ج د وقع عليهما خط ه ز، فكانت زاويتا أ ه ز، ه ز د متساويتين. فإن أ ب، ج د لا يقربان ولا يبعدان لا في جهة أ، ج ولا في جهة ب، د.

البرهان:

إذا طبقنا ه أ على ز د بأن نضع نقطة ه على ز، و ه ز على

(1) ثابت بن قرة، رسالة في برهان المصادرة المشهورة من إقليدس، تحقيق خليل جايوش، ضمن كتابه نظرية المتوازيات في الهندسة الإسلامية، المؤسسة الوطنية للترجمة والتحقيق والدراسات، تونس 1988، ص 12 وبعدها.

نفسه، وزاوية أ هـ ز على زاوية هـ ز د ، انطبق جـ ز على هـ ب ، وزاوية جـ ز هـ ، على زاوية ز هـ ب. وكان خط ز د لخط أ هـ كذلك. فإن لم يكن كذلك كانت زاوية أعظم من المساوية لها، وذلك محال. وقد تبين مع هذا أن خطي هـ ب، ز د إن كانا يقربان في جهة ب، د إذا أخرجهما، أن خطي أ هـ، جـ ز، يتقاربان أيضاً في جهة أ، جـ مثل ذلك التقارب للمطابقة، لكن من المبين المسلم أنه إذا وقع خط مستقيم على خطين مستقيمين، فكان الخطان يتقاربان في إحدى جهتيهما أنهما يبعدان في جهتها الأخرى، وأن تقاربهما من جهة التقارب وتباعدهما من جهة التباعد يزيد بينهما.



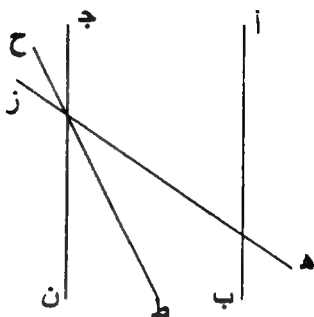
وكذلك إن وضعنا أن خطي هـ ب، ز د متقاربان في جهة ب، د ، وجب أن يتباعد خط أ هـ، جـ ز في جهة أ، جـ. لكن خط أ هـ، جـ ز قد طابقا خطي هـ ب، ز د في جهة ب، د. ولو كان هـ ب، ز د متقاربين لكان أ هـ، جـ ز متباعدين، فلم يطابقاهما. فإن طابقاهما فلم يتباعدا في جهة أ، جـ، فقد بقى إما أن يكون خط أ هـ، جـ ز تقارباً في جهة أ، جـ كتقارب خطي هـ ب، ز د في جهة ب، د الذي وضع، أو أن يكونا لم يتقاربا ولم يتباعدا في جهة أ، جـ، فإن كانا تقارباً فيها بطلت المقدمة المسلمة، لأنه يوجد خطان قد تقاربا في الجهتين. وإن كانا حفظ البعد بينهما فليس يطابقان

هـ ب، ز د، وقد طابقاهما. فما وُضع من أن هـ ب، ز د إذا كانت المتبادلتان اللتان هما أ هـ ز، هـ ز د متساويتين يتقاربان في جهة ب، د محال. وكذلك يستحيل أن يبعدا فيها، فهما لا يقربان ولا يباعدان فيها. وكذلك يتبين في خطي أ هـ، جـ ز؛ وهو المطلوب إثباته.

الشكل الثاني :

إذا وقع خط مستقيم على خطين مستقيمين لا يقربان ولا يبعدان في جهة من جهتيهما، فإن المتبادلتين متساويتان.

مثال ذلك: خطا أ ب، جـ د لا يقربان ولا يبعدان في واحدة من جهتيهما، وقع عليهما هـ ز. فإن زاويتي أ هـ ز، هـ ز د المتبادلتين متساويتان.



البرهان :

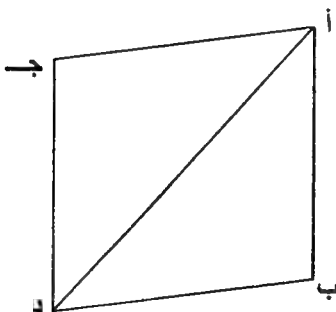
إنهما إن لم تكونا متساويتين فلتكن أ هـ ز أصغر، ولتكن زاوية هـ ز ط مثل زاوية أ هـ ز؛ ونخرج ط ز ح. فخطا ط ز ح، أ ب لا يقربان ولا يبعدان لتساوي المتبادلتين كما قدمنا، وقد كان خطا أ ب، جـ د لا يقربان ولا يبعدان. وقد قاطع جـ د خط ط ح على نقطة ز. وكل واحد منهما لا يقرب ولا يبعد من أ ب، لكن ز ط أقرب إلى هـ ب من ز د لأنه بينه وبينه، وهذا

خلف. فزاويتا أ هـ ز، هـ ز ن متساويتان؛ وهو المطلوب إثباته.

الشكل الثالث :

إذا وُصِلَ بين أطراف خطين مستقيمين متساويين لا يقربان ولا يبعدان بخطين مستقيمين، فإنهما أيضاً متساويان ولا يقربان ولا يبعدان.

مثال ذلك: خطا أ ب، جـ د مستقيمان متساويان لا يقربان ولا يبعدان، وقد وُصِلَ بين أطرافهما بخطى أ جـ، ب د. فإن أ جـ، ب د متساويان ولا يقربان ولا يبعدان.



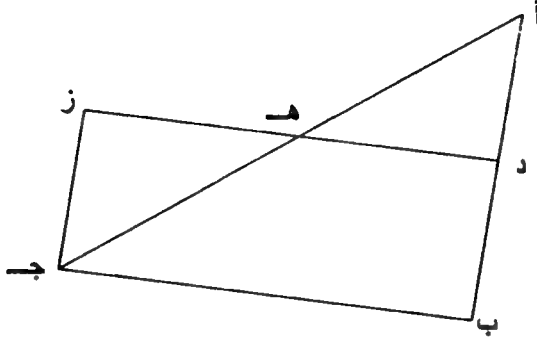
البرهان :

إن زاويتي أ د ج، د أ ب المتبادلتين متساويتان، وخطا أ ب، أ د مساويان لخطى جـ د، د أ كل واحد لنظيره. فمثلاً أ د جـ، د أ ب متساويان، فخطا أ جـ، ب د متساويان. وزاويتا أ د ب، د أ جـ متساويتان وهما متبادلتان. فخطا أ جـ، ب د لا يقربان ولا يبعدان. فخطا أ ب، جـ د لا يقربان ولا يبعدان وهما متساويان. وكذلك أيضاً خطا أ جـ، د ب لا يقربان ولا يبعدان، وهما متساويان. وهو المطلوب إثباته.

الشكل الرابع :

كل مثلث يقسم ضلعان من أضلاعه كل واحد منهما بنصفين ويوصل بين النقطتين اللتين قسما عليهما بخط مستقيم، فإنه نصف الضلع الآخر ولا يقرب منه ولا يبعد.

مثال ذلك: مثلث أ ب ج قسم أ ب منه بنصفين على د، أ ج بنصفين على هـ، ووصل د هـ المستقيم؛ فإنه نصف ب ج ولا يقرب منه ولا يبعد.



البرهان :

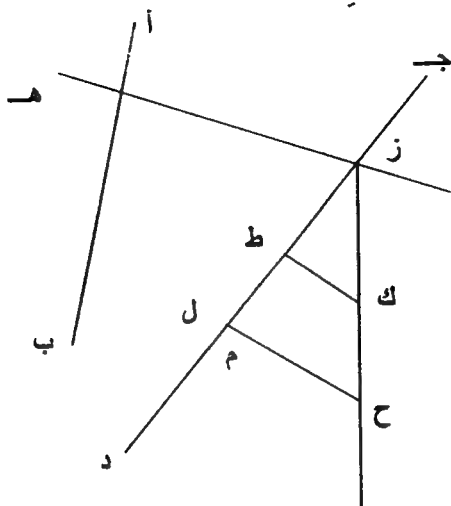
نخرج د هـ إلى ز حتى يكون هـ ز مثل د هـ، ونصل جـ ز. فيكون مثلثا أ د هـ، جـ هـ ز متساويين، وخطا أ د، جـ ز متساويين. فلذلك يكون خطا د ب، جـ ز متساويين. لكن زاويتي أ د هـ، هـ ز جـ متساويتان وهما متبادلتان. فخطا أ ب، جـ ز لا يقربان ولا يبعدان. وكذلك خطا ب د، جـ ز أيضاً لا يقربان ولا يبعدان، وهما متساويان. وقد وصل بين أطرافهما خطا ب جـ، د ز؛ فهما متساويان ولا يقربان ولا يبعدان. لكن د ز

ضعف د ه ف ب ج ضعف د ه ولا يقرب ولا يبعد عنه، وهو المطلوب إثباته.

الشكل الخامس :

إذا وقع خط مستقيم على خطين مستقيمين فتصير الزاويتان اللتان في جهة واحدة أقل من قائمتين، فإن الخطين إذا أخرجا في تلك الجهة التقيا.

مثال ذلك: خطا أ ب، ج د وقع عليهما خط ه ز، وكانت زاويتا ب ه ز، د ز ه أصغر من قائمتين. فإن خطي أ ب، ج د إذا أخرجا في جهة ب، د التقيا.



البرهان :

أن نخرج من نقطة ز خط ز ح لا يقرب ولا يبعد من خط أ ب، ونعلم على ز د نقطة ط كيما اتفقت، ونخرج منها إلى ز ح خط ط ك لا يقرب ولا يبعد من ه ز. فإن اتفق أن يكون أعظم من ه ز، وإلا فصلنا ط ل مثل ز ط، ك ح مثل ز ك، ووصلنا ل، ح. تبين أن ل ح ضعف ط ك، وإنه أيضاً

من ط ك لا يقرب ولا يبعد. فلا بد إذا كان ط ك أصغر من ه ز، وأضعفناه
ثم أضعفنا ضعفه، ومررنا على هذا دائماً أن تنتهي في أضعافه إلى خط أعظم
من ه ز. فليكن ل ح، فخط ل ح أطول من ه ز وهو لا يقرب ولا يبعد
عنه. فلينفصل من ل ح مثل ه ز وهو ح م، فيكون خطا ز ه، ح م
متساويين ولا يقربان ولا يبعدان. فالواصلان بين أطرافهما متساويان ولا
يقربان ولا يبعدان كما تقدم.

لكن ز ح قد وصل بين ز و ح ف ه ب إذا أخرج على استقامة من
جهة ب صار إلى م، وإلا عرض إن وصل بين ه و م غير ه ب، إذا
أخرج ه ب، أن يكون الواصل بين ه و م لا يقرب ولا يبعد عن ز ح.
وقد كان ه ب لا يقرب ولا يبعد عن ز ح، والواصل بين ه و م يوجد بين
ه ب، ز ح، وهذا خلف. فإذن ه ب إذا أخرج صار إلى م، فلا بد له من
أن يلقى قبل نقطة م نقطة من خط ج د، ف أ ب، ج د إذا أخرجا في جهة
ب، د التقيا. وهو المطلوب إثباته.

ويرجع الفضل لثابت بن قرة في ابتداء علم التفاضل والتكامل -
مساهمة مع الكوهي وأبي الوفاء البوزجاني على ما سيأتي لاحقاً-، وذلك
باعتراف الغربيين، فثابت تبعاً لديفيد سميث في كتابه تاريخ الرياضيات قد
اكتشف علم التفاضل والتكامل حينما استطاع إيجاد حجم الجسم المتولد من
دوران القطع المكافئ حول محوره.

وفي كتاب كل منهما والذي يحمل نفس الاسم "تاريخ الرياضيات" أورد
كل من هورد إيفز و كارل بوبر تجديد ثابت بن قرة وتطويره لنظرية
فيثاغورث القائلة: "إن مربع الوتر في المثلث قائم الزاوية يساوي مجموع

مربعى الضلعين القائمين" فبعد أن نقح ثابت برهان فيثاغورث على هذه النظرية، وأدخل عليه بعض التعديلات، استطاع أن يدشن نظرية جديدة تسمح بتعميم نظرية فيثاغورث لأى مثلث أ ب ج مختلف الأضلاع وهى:

$$أ ب + أ ج = ب ح (ب ح + ك ج)$$

على شرط أن تقع نقطتى ك ، ح على الضلع ب ح، وكذلك

$$ك أ ج ب = ك أ ك ج = ك أ ثم استنتج أن:$$

$$أ ب^2 = أ ج^2 = ب ج (ب ح + ك ج)$$

وقدم ثابت البرهان على هذه النظرية عبر ثلاث حالات هى: إذا كانت ك أو زاوية أ قائمة، وحادة ، ومنفرجة، الأمر الذى دفع عجلة علم الهندسة دفعة ممتدة منذ عصر ثابت وحتى العصر الحديث، فما زالت هذه النظرية معمول بها فى الهندسة الحديثة.

الفصل الثالث

أبو كامل المصرى

أبو كامل

(236 - 318هـ / 850 - 930م)

شجاع بن أسلم المصري، ولد في مصر، ونشأ وتربى وتعلم بها حتى نبغ في الجبر وحاز شهرة عظيمة فيه إلى الدرجة التي لقب معها باستاذ الجبر، وفاضل وقته وعالم زمانه وحاسب أوانه بحسب ابن القفطي.

عاش أبو كامل في عصر الخوارزمي وتلمذ على كتبه، وكان من العلماء الذين يفخرون بتعلمهم العلوم على علماء العرب والمسلمين، فكان فخوراً بأنه تتلمذ على كتب علامة الإسلام في الجبر محمد بن موسى الخوارزمي.

ألف أبو كامل كتب عديدة في الرياضيات بحسب صاحب الفهرست، منها: كتاب المساحة والهندسة، كتاب الجمع والتفريق، كتاب الخطأين، كتاب الجبر والمقابلة، وهو الكتاب الوحيد الذي وصل إلينا من مؤلفات المصري الحاسب، وذلك بخلاف مؤلفات أخرى وصلت إلينا من مصادر غير عربية مثل "كتاب طرائف الحساب" المحفوظ مخطوطه في مكتبة لينن بهولندا.

ويعترف أبو كامل المصري الحاسب بفضل الخوارزمي عليه، فيذكر في مقدمة كتابه الذي أسماه أيضاً "الجبر والمقابلة" أن كتاب محمد بن موسى الخوارزمي المعروف بكتاب الجبر والمقابلة أصح الكتب الرياضياتية أصلاً، وأصدقها قياساً، وكان مما يجب علينا من التقدمة والإقرار له بالمعرفة والفضل، إذ كان السابق إلى كتاب الجبر والمقابلة، والمبتدئ له، والمخترع لما فيه من الأصول التي فتح الله لنا بها ما كان منغلِقاً، وترك (مؤلفها) شرحها وإيضاحها، ففرعت منها مسائل كثيرة يخرج أكثرها إلى غير الضروب الستة التي ذكرها

الخوارزمي في كتابه، فدعاني إلى كشف ذلك وتبيينه، فألفت كتاب الجبر والمقابلة، وبيّنت شرحه في كتاب الأرخمطيقي في الأعداد والجبر والمقابلة.

ويعد هذا الكتاب أشهر كتب أبي كامل، واستمر فاعلاً في التقاليد الرياضياتية عبر العصور اللاحقة، ووضعت له شروحات كثيرة. وقد وصل إلينا في نسختين مخطوطتين عربيتين، وترجم إلى اللغة العبرية ترجمة ناقصة، وترجم إلى اللغة الإنجليزية ونُشر سنة 1966 بمعرفة مارتن ليفي.

ويشتمل كتاب الجبر والمقابلة لأبي كامل على معادلات الخوارزمي الست شارحاً لها، ومعللاً لبعضها مثل المعادلة $s^2 = 5$ التي علّلها هندسياً عن طريق خمسة خطوط موازية لأحد أضلاع مربع ضلعه s تقسم المربع أقساماً متساوية. كما أضاف أبو كامل على معادلات الخوارزمي معادلات كثيرة بلغت تسع وستين معادلة وربطها بالهندسة. ويعد أبو كامل، بحسب مارتن ليفي، أول من حل المعادلات الجبرية التي درجتها أعلى من الدرجة الثانية بوضوح تام. ووردت هذه الحلول لأول مرة في تاريخ الرياضيات ضمن مصنّفاته في المضلعين الخماسي والعشاري، فضلاً عن كتاب الجبر والمقابلة، ومنها المعادلات التالية:

$$s^2 = 2ص + 2ع$$

$$س ع = 2ص$$

$$س + س + 2س + م س^2 = 10$$

$$س + ص + ع = 10 ، س > ص > ع .$$

$$\frac{10}{س - 10} = \frac{10}{6} + \frac{1}{4}$$

$$\sqrt[3]{\frac{10س}{3+3}} = س - 10$$

وإذا كان الخوارزمي قد أوجد الجذر الحقيقي الموجب لمعادلات الدرجة الثانية، فإن أبا كامل اهتم بإيجاد الجذرين الموجب والسالب، واستطاع حل الكثير من المعادلات المحتوية على مجهولين وأكثر حتى خمسة مجاهيل، وهاك مثال لحل أبى كامل لمعادلة تحتوى على خمسة مجاهيل:

دفع إليك مائة درهم، وقيل لك ابتع بها مائة طير من خمسة أصناف: بط وحمام وفواخت وقناير ودجاج، كل بطة بدرهمين، والحمام إثنين بدرهم، والفواخت كل واحد بثلاثة دراهم، والقناير كل واحد بأربعة دراهم، والدجاج كل واحدة بدرهم.

الحل: افرض أن عدد البط = س ، وعدد الحمام = ص ، وعدد الدجاج = م. الفواخت = ز ، وعدد القناير = ع ، وعدد الدجاج = م.

اشترى من البط عدداً قيمته 2 س درهم.

واشترى من الحمام عدداً قيمته $\frac{ص}{2}$ درهم .

واشترى من الفواخت عدداً قيمته $\frac{ز}{3}$ درهم .

واشترى من القناير عدداً قيمته $\frac{ع}{4}$ درهم .

واشترى من الدجاج عدداً قيمته م درهم .

وبمعادلتين خطيتين يمكن التعبير عن صيغة السؤال هكذا :

$$س + ص + ز + ع + م = 100 \quad س - ص - ز - ع = 100 - م \quad (1)$$

$$2س + \frac{ص}{2} + \frac{ز}{3} + \frac{ع}{4} + م = 100 \leftarrow$$

$$م = 100 - 2س - \frac{ص}{2} - \frac{ز}{3} - \frac{ع}{4} \dots\dots\dots (2)$$

من (1) ، (2) ينتج أن :

$$100 - س - ص - ز - ع = 100 - 2س - \frac{ص}{2} - \frac{ز}{3} - \frac{ع}{4}$$

$$2س - س = س = (ص - \frac{ص}{2}) + (ز - \frac{ز}{3}) + (ع - \frac{ع}{4})$$

$$س = \frac{ص}{2} + \frac{ز}{3} + \frac{ع}{4}$$

وهذه المسألة التى تحتوى على خمسة مجاهيل يذكر أبو كامل أن لها بعد هذا الحل 2696 جواباً ممكناً.

وهكذا يتضح أن أبا كامل كمل جبر الخوارزمى وأضاف عليه، ففسر مبادئه بطريقة جازمة، وعالج الجذور الصم، وأجرى العمليات الحسابية من جمع وطرح على الحدود الجبرية، وكل هذه العمليات منلت تطويراً مهماً لعلم الجبر فى العصور اللاحقة لأبى كامل، وأثرت فىمن جاء بعده من علماء الرياضيات المسلمين كالكرخى وعمر الخيام، وامتد التأثير إلى علماء الغرب، بل وعلماء الأرض على حد قول فلورين كاجورى فى كتابه "تاريخ الرياضيات" حيث قال: "كانت مؤلفات أبى كامل خلال القرن الثالث عشر للميلاد من المراجع الفريدة لعلماء الرياضيات فى جميع أنحاء المعمورة". وكما اعتمد العالم ليوناردوا بيزى على مؤلفات أبى كامل، قرر هورد إيفز أن العالم الرياضياتى المشهور "قابوناسى" استند فى مؤلفاته فى علمى الحساب والجبر على مؤلفات الخوارزمى وأبى كامل المصرى.

الفصل الرابع

أبو الوفاء البوزجاني

أبو الوفاء البوزجاني (329-388هـ / 940-998م)

أبو القاسم محمد بن يحيى، ولد في قرية بوزجان بخراسان التي شب بها وتعلم حتى سن العشرين، فدرس الرياضيات على عمه أبي عمر المغازي، وخاله أبي عبدالله محمد بن عنبه، ودرس الهندسة على أبي يحيى الماوردي وأبي العلاء بن كرنيب، ثم انتقل إلى بغداد سنة 348هـ / 959م، وقضى بقية عمره فيها مشغلاً بالتأليف والرصد والتدريس.

يعد أبو الوفاء أحد الأئمة المعدودين في الرياضيات والفلك⁽¹⁾، وألف فيهما مؤلفات مهمة، أفادت منها الإنسانية، فلقد برع أبو الوفاء في الهندسة، واكتشف فيها كسوفاً لم يسبقه إليها أحد، وكذلك الجبر، حيث زاد في بحوث الخوارزمي زيادات تعد أساساً لعلاقة الهندسة والجبر، ومنها أنه حل هندسياً معادلات من الدرجة الرابعة، وأوجد حلولاً تتعلق بالقطع المكافئ مهدت السبيل لعلماء الغرب فيما بعد أن يدعوا تقدمهم خطوات واسعة أدت إلى أروع ما وصل إليه العقل البشري، وهو التفاضل والتكامل، وينكشف إدعائهم إذا علمنا

(1) ثبت حديثاً في أكاديمية العلوم الفرنسية أن الاختلاف الثالث في حركة القمر هو من اكتشاف البوزجاني، وليس - كما عرف العالم زوراً لقرون عدة - تيكو براهي الدنماركي. فلقد اكتشف أبو الوفاء "الاختلاف القمري الثالث"، والذي يُعرف "بالاختلاف Variation" وهو عبارة عن انحراف أو حركة غير ثابتة في القمر أثناء سيره بين سنة وأخرى. وكان هيباخورس أول من قاس أول اختلاف للقمر، والاختلاف أو الانحراف الثاني اكتشفه بطليموس، واكتشف أبو الوفاء الاختلاف الثالث، ولا يخفى ما لهذا الاكتشاف من أهمية قصوى في اتساع نطاق علم الفلك. وقد وصف الغربيون صاحبه وهو البوزجاني بأنه أعظم ذهنية فلكية نبغت في الإسلام.

أن علم التفاضل والتكامل تم اكتشافه في الحضارة الإسلامية أيضاً على يد ثابت بن قرة كما مر سابقاً.

ويعترف علماء الغرب⁽¹⁾ بأن أبا الوفاء هو أول من وضع النسبة المثلثية "ظل" وأول من استعملها في حلول المسائل الرياضية، وأدخل القاطع، والقاطع تمام ودرس تربيعة القطع المخروطي المكافئ بأنواعه الثلاثة: قطع مكافئ Parabola ، وقطع ناقص Ellipse ، وقطع زائد Hyperbola ، كما درس المساحة الحجمية للقطع المكافئ المجسم Paraboloid ، وأوجد طريقة جديدة لحساب جداول الجيب التي امتازت بدقتها، حتى أن جيب الزاوية 30 درجة كان صحيحاً إلى ثمانية أرقام عشرية. كما وضع البوزجاني الجداول للمماس، ووضع المعادلات التي تتعلق بجيب زاويتين. وبهذه الاكتشافات، وخاصة وضع "ظل" في عداد النسبة المثلثية أصبح البوزجاني في نظر علماء الغرب من الخالدين، حيث أسس بذلك ووضع أحد الأركان التي قام عليها علم حساب المثلثات الحديث، وأصبح أكثر بساطة ووضوحاً بوضعه هذا القانون:

$$\text{جا (أ + ب)} = \text{جا أ جتا ب} + \text{جتا أ جتا ب}$$

ك (الكمية)

ولأبى الوفاء مؤلفات أخرى مهمة، منها كتاب "منازل الحساب"، وكتاب "فيما يحتاج إليه الصناع من أعمال الهندسة"، وضعه بناءً على طلب بهاء الدولة ليتداوله أرباب الصناعة⁽²⁾.

(1) أمثال: سارتون، وكراى فو، وسميث ... وغيرهم.

(2) أبو الوفاء البوزجاني، فيما يحتاج إليه الصناع من أعمال الهندسة، مخطوط أيا صويا رقم 2753، والأمبروزيانا كتالوج 44 رقم 68.

وتظهر عبقرية البوزجاني أيضاً في تطويره لفن الرسم الهندسي حيث ألف فيه كتاباً وصفه الغربيون بأنه أروع وأهم ما كتب في هذا الفن، وترجموه باسم Construction Geometriques كتاب في عمل المسطرة والبركار والكونيا، ويعنى البوزجاني بالكونيا، المثلث القائم الزاوية، ويتكون الكتاب من ثلاثة عشر باباً، هي:

الباب الأول: في عمل المسطرة والبركار.

الباب الثاني: في عمل الأشكال في الدوائر.

الباب الثالث: في عمل الدائرة على الأشكال.

الباب الرابع: في الأشكال بعضها في بعض.

الباب الخامس: في الأصول والكونيا.

الباب السادس: في عمل الأشكال المتساوية.

الباب السابع: في قسمة المثلثات.

الباب الثامن: في قسمة المربعات.

الباب التاسع: في عمل مربعات من مربعات وعكسها.

الباب العاشر: في قسمة الأشكال المختلفة الأضلاع.

الباب الحادي عشر: في الدوائر المتماسة.

الباب الثاني عشر: في قسمة الأشكال على الكرة.

الباب الثالث عشر: في عمل الدائرة في الأشكال.

يتضح من استعراض أبواب الكتاب أنه يحتوى على طرق لإنشاء
الأجسام المنتظمة كثيرة السطوح حول الكرة مستعملاً طرقاً مختلفة لحل عملية
واحدة، وفيه طرق خاصة ومبتكرة لكيفية الرسم الهندسى واستعمال الآلات
اللازمة لذلك مما حدا بعلماء الغرب أن يجمعوا على أن هذه الطرق قد دفعت
بأصول الرسم الهندسى خطوات مهمة إلى الأمام.

الفصل الخامس

الكوهى

الكوهى

(ت 405هـ / 1014م)

أبو سهل بن رستم، ولد ونشأ فى الكوة من جبال طبرستان، وتعلم وعاش فى بغداد، ونبغ فى الرياضيات والفلك إبان عصر ازدهار الحضارة الإسلامية، فقرّبه شرف الدولة البويهى وعينه سنة 378هـ / 988م رئيساً للمرصد الذى أسسه ببغداد، فقام برصد تنقلات ومسارات الكواكب السبعة وقدمها فى صورة دراسات لشرف الدولة، ودونها فى كتبه الفلكية مثل كتاب "صناعة الاسطرلاب بالبراهين" الذى انتقد فيه بعض الفرضيات اليونانية الفلكية، واشتهر الكوهى بصناعة الآلات الرصدية، ووضع عدداً من الأرصاد التى أعتمد عليها فى عصره وما تلاه.

أما فى الرياضيات فقد وضع عدداً من المؤلفات الهندسية أهمها: إخراج الخطين من نقطة على زاوية معلومة، كتاب الأصول على تحريكات أفقليدس، كتاب مراكز الأكر، كتاب الزيادات على أرشميدس فى المقالة الثانية، تنليث الزاوية وعمل المسبغ المتساوى الأضلاع فى الدائرة.

ومن إنجازاته الهندسية اهتمامه بمسائل أرشميدس وأبولونيوس التى تؤدى إلى معادلات ذات درجة عالية من معادلات الدرجة الثانية، فالفروض التى لم يستطع أرشميدس إثباتها فى كتابه "الكريات والاسطوانات"، وقد أثارت بحثاً عند ابن الهيثم وغيره من العلماء، وضع الكوهى هذه المسألة على هذا النحو: لإنشاء قطعة من كرة حجمها يساوى حجم قطعة من كرة أخرى ومساحة سطحها الجانبى يساوى مساحة السطح الجانبى لقطعة كروية أخرى.

وقد تمكن الكوهى من استخراج حلها ببراعة فائقة، وذلك باستعانتة بقطعتين مخروطيتين هما القطع الزائدة والقطع المنتظم بالإضافة إلى

مخروطين مساعدين، ثم ناقش الحدود، فحلت المسألة التي شكلت أهمية فى تاريخ الهندسة، وعدت من أحسن ما كتب عن الهندسة عند المسلمين.

وإذا كان ثابت بن قرة قد ابتدع علم التفاضل والتكامل بإيجاده حجم الجسم المتولد من دوران القطع المكافئ حول محوره، فإن الكوهى قد طوّر مسيرة هذا العلم بإيضاحه كيفية إنشاء قطعة كروية تكافئ قطعة كروية أخرى معلومة، وتساوى مساحة سطحها الجانبى مساحة السطح الجانبى لقطعة كروية ثابتة معلومة.

وباستخدام البراهين الهندسية فى حل كثير من المسائل التى لها علاقة بإيجاد النّقل، سجل الكوهى السبق للمسلمين فى دراسة الأثقال، وبحوثه التى أسست للمبادئ التى تقوم عليها الروافع خير دليل على ذلك.

الفصل السادس

الكرخي

الكرخى

(350 - 421 هـ / 961 - 1034 م)

أبو بكر محمد بن الحاسب الكرخى، اختلف فى لقبه بين الكرخى، والكرجى، الأول نسبة إلى ضاحية كرخ من ضواحي بغداد، والثانى نسبة إلى كرج القريبة من همدان، إلا أن مؤيدات كثيرة تشير إلى أنه "الكرخى"، ومنها أن معظم مؤلفاته تحمل هذا الاسم.

عاش الكرخى فى بغداد ودرس بها، وألف فيها معظم انتاجه العلمى الذى جعله من أعظم الرياضيين المسلمين، وفى بغداد توفى.

ألف الكرخى ما يربو على العشرين مؤلفاً معظمها فى الحساب والجبر والهندسة عملت على تطور الرياضيات فى عصره، وما تلاه من عصور حتى العصر الحديث، على ما سيتبين لاحقاً بعد استعراض قائمة مؤلفاته، ما وصلنا منها، وما لم يصل:

البديع فى الحساب⁽¹⁾، الدور والوصايا، رسالة استخراج الجذور الصماء وضربها وقسمتها، رسالة تحتوى على ما يزيد على 250 مسألة متنوعة، رسالة الحالات الست فى الجبر، رسالة فى بعض النظريات فى الحساب والجبر، رسالة فى برهان النظريات المتعلقة بإيجاد مجموع مربعات ومكعبات الأعداد الطبيعية، رسالة فى علاقة الرياضيات بالحياة العملية، رسالة فى المعاملات وفك ذوات الحدين، رسالة الطرق الحسابية لتسهيل بعض

(1) مخطوط مكتبة الفاتيكان ثالث Barb 36 رقم 1. حققه عادل أنبوبا ونشرته الجامعة اللبنانية، بيروت 1964.

العمليات الحسابية، رسالة فى مساحات بعض السطوح، رسالة فى النسبة، كتاب أنباط المياه⁽¹⁾، كتاب فى الحساب الهندى، كتاب فى الاستقراء، كتاب العقود والأبنية، كتاب المدخل فى علم النجوم، علل حساب الجبر والمقابلة⁽²⁾، الفخرى فى الجبر⁽³⁾، الكافى فى الحساب⁽⁴⁾، مختصر فى الحساب والمساحة⁽⁵⁾.

انصب جُل اهتمام الكرخى على علم الحساب وعلم الجبر، لما لالأول من أهمية فى إخراج المجهولات من المعلومات، ولما للثانى من قوة وإطراد فى مختلف المسائل الهندسية. ولما رأى أن سابقه من المؤلفين لم يشرحوا مقدمات مؤلفاتهم كى تصل إلى الغاية منها، شرع فى تأليف كتابه "الكافى فى انساب" الذى يقول فى مقدمته⁽⁶⁾: وجدت علم الحساب موضوعاً لإخراج المجهولات من المعلومات فى جميع أنواعه، وألفت أوضح الأبواب إليه،

(1) مخطوط مكتبة أصفية 1/ 197 رقم 128، ومكتبة باتنة 2/ 335 رقم 2519 (1)، ومكتبة بنكيور 22/ 84 رقم 2468.

(2) مخطوط مكتبة بودليانا رقم 1/ 986 /3.

(3) مخطوط مكتبة أسعد أفندى باستانبول رقم 3157، ومكتبة الأوقاف ببغداد رقم 5440، ومكتبة باريس رقم 2459، ومكتبة دار الكتب المصرية رقم 23 رياضيات، ومكتبة كوبريلى باستانبول رقم 950، ومكتبة لالهلى باستانبول رقم 1714 /2.

(4) مخطوط مكتبة جوتا رقم 1474، ومكتبة داماد ابراهيم باشا رقم 855، ومكتبة طوبقبو سراى رقم 3135، 3464 /16، ومكتبة سباط رقم 111، ومكتبة الفاتح رقم 3439 /2، ومكتبة كوبريلى رقم 950.

(5) مخطوط مكتبة بلدية الاسكندرية رقم 82 فنون /4.

(6) الكرخى، الكافى فى الحساب، مخطوط مكتبة كوبريلى باستانبول رقم 950، ورقة 3 ظ.

وأول الأسباب عليه، صناعة الجبر والمقابلة لقوتها واطرادها فى جميع المسائل الحسابية على اختلافها، ورأيت الكتب المصنفة فيها غير ضامنة لما يحتاج إليه من معرفة أصولها، ولا وافية بما يستعان به علم فروعها، وأن مصنفها أهملوا شرح مقدماتها التى هى السبيل إلى الغاية، والموصلة إلى النهاية، ثم لم أجد فى كتبهم لها ذكراً، ولا بياناً، فلما ظفرت بهذه الفضيلة واحتجت إلى جبر تلك النقيصة، لم أجد بداً من تأليف كتاب يحيط بها ويشتمل عليها، ألخص فيه شرح أصولها.

شرع الكرخى بعد دراسة جبر الخوارزمى وتطويره بمعرفة أبى كامل المصرى وآخرين من علماء الرياضيات فى الحضارة الإسلامية، شرع فى "حسنة الجبر"، وفى سبيل ذلك بحث فى كافة السبل التى تحقق له استغناء العمليات الجبرية عن التمثيل الهندسى. وقد استطاع بالفعل أن يحقق تلك الخصوصية الجبرية وجاءت نظريته التى وقف عليها فبكه Woepke أحد علماء الرياضيات الغربيين المشهورين، وانتهى بعد دراسته لكتاب الكافى فى الحساب للكرخى سنة 1853 مقررأ أنها النظرية الأكثر اكتمالاً، أو بالأصح النظرية الوحيدة فى الحساب الجبرى عند العرب التى نعرفها حتى الآن.

وضع الكرخى تطويراً فريداً لقانون حل معادلات الدرجة الثانية لم يسبقه إليه أحد، وأصبح قانوناً رئيساً فى علم الجبر ينص على:

$$س = \left[\left(\frac{ب}{2} \right)^2 + أ - ج \right] \div أ$$

ولإيجاد الجذر التقريبى للأعداد التى ليس لها جذر مثل م = ب² + ج، طور الكرخى القانون الخاص بذلك، وابتكر صيغة جديدة تُخرج الجذر التقريبى لما لا يمكن اخراجه من الأعداد مثل العدد (7) هكذا :

$$\sqrt{4} = \text{ب} + \frac{2}{1+\text{ب}}$$

$$7 = 4 + 3 \text{ حيث } \text{م} = \text{ب}^2 + 3$$

$$\text{م} = 7 ، \text{ب} = 2 ، 3 = 3$$

$$\text{فينتج أن: } 2.6 = 2 \frac{3}{5} = \frac{3}{1+4} + 2 = 7$$

وأوجد الكرخى الجذر التربيعى للعدد (10) هكذا :

$$10 = 1 + 3^2$$

$$\text{م} = 10 ، \text{ب} = 3 ، 1 = 3 - 1 ، \text{فينتج أن :}$$

$$\sqrt{10} = 3 + \frac{1}{6} = \frac{1}{6} + 3 = 3.16$$

والجذر التربيعى للعدد (10) حالياً 3.162

وابتكر الكرخى طريقة معالجة مختلف المتواليات، فقد وجد أن مجموع

المتوالية: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots$ إلى الحد "ن" هو:

$$\frac{1}{6} [\text{ن} (\text{ن} + 1) (1 + 2\text{ن})] ، \text{ولكنه لم يقدم البرهان عليها، إلا أنه يُعد}$$

أول من عالج وبرهن على المتوالية التى سماها "الإندراجية" وهى:

$$[\text{هـ} - 1 + 1] ، \text{وكذلك المتواليات التالية:}$$

$$- \text{مجموع مربعات الأعداد من 1 إلى ن} = (1 + \text{ن}) (\frac{\text{ن}}{3} + \frac{1}{6})$$

$$- \text{المجموع من 1 إلى ن لحاصل الضرب} (\text{ن} + 1 - \text{هـ}) (\text{ن} + 1 = \text{هـ})$$

$$= (1 + \text{ن})^2 - \text{المجموع من 1 إلى ن} (\text{هـ}^2).$$

- المجموع من 1 إلى n^{-1} : $هـ - (هـ + 1) + \left(\frac{n}{3}\right) + (ن^{-1}) (ن + 1)$

$$- 1 + 2 + 3 + \dots + ن = ن^2 + ن$$

$$- 1 + 3 + 5 + \dots + ن = \left(\frac{n}{2}\right) (ن + 1)$$

واستنتج الكرخى المعادلة التى لا يخلو منها كتاب فى الجبر وهى:

$أس^ن + ب ص^ن = م ع^{-ن-1}$. وقد استنتجها عن طريق حله لمعادلة عددين مجموع مكعبيهما يساوى مربع العدد الثالث، بمعنى أن $ص^3 + س^3 = ع^3$. وباستعمال الأعداد الجبرية، فرض الكرخى أن $ص = م س$ ، $ع = ن س$.

$$\text{ومن هنا، فإن } ص^3 + س^3 = ع^3 \longleftarrow س^3 م^3 + س^3 = ن^2 س^2$$

$$\longleftarrow س^3 (م^3 + 1) = ن^2 س^2$$

$$\text{وبقسمة الطرفين على } س^2 \longleftarrow س (م^3 + 1) = ن^3$$

إن $س = \frac{ن^4}{م^3 + 1}$ باعتبار أن $م$ ، $ن$ عددين جذريين، وباعتبار أن $س = 1$ ، $ص = 2$ ، $ع = 3$ ، فيكون الناتج $3 = 2 + 1$ ، ومنه ينتج أن:

$$أس^ن + ب ص^ن = م ع^{-ن-1}$$

وابتكر الكرخى قانوناً يسمح بجمع وطرح الأعداد الصم، وهى الأعداد

التى ليس لها جذر، وهو:

$$\sqrt{أ} + \sqrt{ب} = \sqrt{أ + ب + 2\sqrt{أب}}$$

ولتطبيقه ضرب الكرخى المثال التالى :

$$\sqrt{15} = \sqrt{12 \times 3} \sqrt{2} = (12 + 3) \sqrt{\quad} = \sqrt{12} + \sqrt{3}$$

$$\sqrt{3} \sqrt{3} = \sqrt{37} = \sqrt{12 - 15} = \sqrt{36} \sqrt{2}$$

ومن أهم مبتكرات الكرخي اكتشافه نظرية ذات الأسين (ذات الحدين) لأسس صحيحة موجبة، وترتيبه معاملات مفكوك (س + 1)ⁿ، فجاء مثله معاملات نظرية ذات الحدين، ذلك المثلث المشهور الذي أخذه بسكال الفرنسي (1623-1662) وادعاه لنفسه حتى أشتهر المثلث في تاريخ الرياضيات بمثلث بسكال، وليس مثلث الكرخي، وهاك هو:

1 ^o	2 ^o	3 ^o	4 ^o	5 ^o	6 ^o	7 ^o	8 ^o	9 ^o	10 ^o	11 ^o	12 ^o
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2
	66	55	45	36	28	21	15	10	6	3	1
	220	165	120	84	36	35	20	10	4	1	
	495	330	210	126	70	35	15	5	1		
	792	462	252	126	56	21	6	1			
	924	462	210	84	28	7	1				
	792	330	120	36	8	1					
	495	165	45	9	1						
	220	55	10	1							
	66	11	1								
	12	1									
	1										

لقد أثرت ابتكارات الكرخى الجبرية وإنجازاته الرياضياتية فى العصور اللاحقة وحتى العصر الحديث، حيث ظل الغرب يستفيد من جبر وحساب الكرخى حتى القرن التاسع عشر، فترجم هو سهيلم كتاب الكرخى "الكافى فى الحساب" إلى اللغة الألمانية، وبه أصبحت أوربا - بحسب جورج سارتون - مدينة للكرخى الذى قدم للرياضيات أعم وأكمل نظرية فى علم الجبر عرفت بها، وبقيت حتى القرن التاسع عشر الميلادى تستعمل مؤلفاته فى علمى الحساب والجبر. ويصرح أحد مؤرخى الرياضيات الغربيين وهو موريس كلاين أن الكرخى البغدادى العالم المشهور الذى عاش فى أوائل القرن الحادى عشر الميلادى يعتبر مفكراً من الدرجة الأولى، وهذا يظهر من كتابه "الفخرى فى الجبر"، فطور هذا الحقل إلى درجة يمكن التعرف على عقليته الجبارة خلالها.

ويُعد الكرخى - تبعاً لهورد إيفز - من بين العلماء الرياضيين المبتكرين لما فى كتابه الفخرى من نظريات جبرية جديدة تدل على عمق وأصالة فى التفكير، وهو أحسن كتاب فى علم الجبر فى العصور الوسطى، مستنداً على كتاب محمد بن موسى الخوارزمى "الجبر والمقابلة"، وامتاز كتاب الفخرى بطابعه الأصيل فى علم الجبر لما فيه من الابتكارات الجديدة والمسائل التى لا يزال لها دور فى الرياضيات الحديثة.

الفصل السابع

عمر الخيام

عمر الخيام (ت 515هـ - 1121م)

أبو الفتح عمر بن إبراهيم النيسابوري، المكنى بالخيام لأنه كان في صغره يشتغل بحرفة صنع وبيع الخيام. ومنذ صباه تنقل في طلب العلم حتى استقر في بغداد سنة 466هـ - 1074م. أبدع الخيام في كثير من العلوم والمعرفة مثل اللغة والأدب والرياضيات والفلك والفقه والتاريخ. وعلى الرغم من شهرته بقصائده المعروفة بالرباعيات التي لا تخلو منها أي مكتبة في العالم، إلا أنه كان رياضياتياً بارعاً وفلكياً أصيلاً. ألف الخيام مؤلفات كثيرة في معظم فروع العلم والمعرفة المعروفة في عصره ومنها: رسالة في شرح ما أشكل من مصادرة كتاب أقليدس، رسالة في النسب، رسالة في البراهين على مسائل الجبر والمقابلة، رسالة الميزان الجبري، رسالة في فرضية المتوازيات الإقليدية، الرباعيات شعر، كتاب مشكلات الحساب، رسالة في حساب الهند، كتاب زيچ ملكشاه (جداول فلكية)، كتاب المقنع في الحساب الهندسي، رسالة في المعادلات ذات الدرجة الثالثة والرابعة، خمس رسائل فلسفية.

اطلع الخيام على أعمال الخوارزمي، وتناولها بالدرس جاعلاً من نفسه منافساً للخوارزمي يحاول أن يصل إلى أشياء جديدة لم يصل إليها، واستمر الخيام على هذا الوضع إلى أن وضع كتابه: "في الجبر" الذي فاق كتاب الخوارزمي في نظر بعضهم.

فلئن كانت المعادلة البسيطة ذات الحدين (ص - س) و (م س = س²) بأشكالها الستة معروفة منذ عصر الخوارزمي، إلا أن التوسع في تقسيم

المعادلات وتصنيفها لم يعرف قبل الخيام. كذلك تمكن عمر الخيام من حل المعادلات من الدرجتين الثالثة والرابعة، وهذه قمة ما وصل إليه الرياضيون المسلمون، فكتابه "فى الجبر" يعتبر من الدرجة الأولى، ويمثل تقدماً عظيماً جداً على ما نجده من هذا العلم عند الإغريق، لقد أحرز تفوقاً على (الخوارزمى) نفسه فى درجات المعادلة بصفة خاصة. فقد خصص القسم الأكبر من كتابه لمعالجة المعادلات التكعيبية، بينما لم يقصد الخوارزمى إلا المعادلات التربيعية يصدد بحث المسائل فى الحلول.

وقد صنف الخيام المعادلات ذات الدرجة الثالثة إلى سبعة وعشرين نوعاً، ثم عاد فقسمها إلى أربعة أشكال، الأثنان الأخيرتان تتألفان من معادلات ثلاثية الحدود ورباعية الحدود. أما الشكل الرابع فيتألف من ثلاث صنوف:

$$س^3 + ب س = ج س + هـ$$

$$س^3 + ج س = ب س^2 + هـ$$

$$س^3 + هـ = ب س^2 + ج س$$

وقد قدم الخيام الحلول على هذه الأصناف، بالإضافة إلى حلوله لمعادلات الدرجة الثالثة كلها، وهو ما لم يجده الخيام فى كتب السابقين عليه. يقول فى مقدمة كتابه: إنك لو اجد فى هذه الدراسة فروضاً تعتمد على نظريات ابتدائية معينة فى غاية الصعوبة والتعقيد، لم يصل إلينا من أبحاث القدماء ما ينير لنا السبيل إلى معالجتها أبداً.

فركز الخيام جل اهتمامه على حل جميع أنواع معادلات الدرجة الثالثة، وهى المسألة التى صعبت على أسلافه ولم يتوصلوا إلى حل لها. ولما

لاحظ الخيام أن أسلافه لم يتمكنوا من حل هذه المعادلات بالجذور، لجأ هو إلى الطريق الهندسى. ويذكر كارادى فو أن طريقة حل الخيام لمعادلات الدرجة الثالثة تبدو بنصها الحرفى تقريباً فى كتاب "الجومطرى" لديكارت.

وقد مهدت الأبحاث فى الاتجاه الهندسى الطريق للعمل الجبرى للخيام الذى يشكل الإنطلاقة الأولى للهندسة الجبرية. فمع الخيام لم تعد المسألة مسألة حل هذه أو تلك من معادلات الدرجة الثالثة التى يطرحها بحث ما، بل مسألة مشروع لحل جميع الصناف الـ 25 للمعادلات من الدرجة الثالثة وما دون⁽¹⁾.

ويعد عمر الخيام - تبعاً لسارتون - أول من أبدع فكرة التصنيف، فعُد بذلك أول من مهد الطريق أمام تدشين "الهندسة التحليلية"، إذ قام بتصنيف المعادلات بحسب درجتها، وبحسب الحدود التى فيها محصور فى أربعة عشر نوعاً، وبرهن هندسياً على حل كل معادلة منها باستخدام القطوع المخروطية الثلاث:

$$\text{الدائرة: (س - أ)}^2 + (\text{ص - ب})^2 = \text{ج}^2$$

$$\text{القطع المكافئ: ص}^2 = \text{أ س} + \text{ب، أو س}^2 = \text{أ ص} + \text{ب}$$

$$\text{القطع الزائد: (ص}^2 - \text{س}^2) = \text{ج}^2 \text{ أو س ص} = \text{ب}$$

$$\text{أو (س - أ) (ص - ب) = ج}^2$$

قسم الخيام المعادلات التكعيبية إلى أربعة عشر صنفاً تمثلها المعادلات التالية⁽²⁾:

(1) رشدى راشد، وبيجان وهاب زادة، رياضيات عمر الخيام، ترجمة نقولا فارس، مركز

دراسات الوحدة العربية، بيروت 2005، ص175.

(2) المرجع نفسه.

المعادلة 3	$x^3 = c$	(م.م)
المعادلة 13	$x^3 + bx = c$	(م.د) قطع مكافئ ودائرة
المعادلة 14	$x^3 + c = bx$	(م.ز) قطع مكافئ وقطع زائد
المعادلة 15	$x^3 = bx + c$	(م.ز)
المعادلة 16	$x^3 = ax^2 = c$	(م.ز)
المعادلة 17	$x^3 + c = ax^2$	(م.ز)
المعادلة 18	$x^3 = ax^2 + c$	(م.ز)
المعادلة 19	$x^3 + ax^2 + bx = c$	(د.ز)
المعادلة 20	$x^3 + ax^2 + c = bx$	(ز.ز)
المعادلة 21	$x^3 + bx + c = ax^2$	(ذ.ز)
المعادلة 22	$x^3 = ax^2 + bx + c$	(ز.ز)
المعادلة 23	$x^3 + ax^2 = bx + c$	(ز.ز)
المعادلة 24	$x^3 + bx = ax^2 + c$	(ذ.ز)
المعادلة 25	$x^3 + c = ax^2 + bx$	(ز.ز)

وباستخدام القطوع المخروطية الثلاث، وهى الدائرة والقطع المكافئ والقطع الزائد يحل الخيام هذه المعادلات فيستخدم قطعين متكافئين لحل المعادلة رقم 3، و قطع مكافئ ودائرة لحل المعادلة رقم 13، و قطع مكافئ

وقطع زائد لحل المعادلات من 14 إلى 18، ودائرة وقطع زائد لحل المعادلات 19، 21، 24، وقطعين زائدين لحل المعادلات 20، 22، 23، 25.

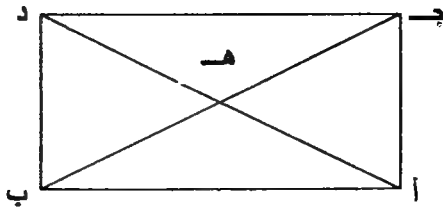
وجاء في القرن السابع عشر الميلادي سيمون الهولندي (ت 1620) وتتبع تصنيف الخيام، وأدخل عليه بعض التعديلات الطفيفة، فنسب إليه علماء الغرب "فكرة التصنيف" وتناسوا مبتكرها الحقيقي عمر الخيام!

ويُعد الخيام من الرياضيين الذين اعتقدوا بضرورة الهندسة في دراسة جميع ميادين العلوم، وعليه فقد أولى الهندسة أهمية خاصة ضمن أبحاثه الرياضياتية، وأفرد لها عدة مؤلفات شرح فيها هندسة إقليدس ونقدها، كما نقد محاولات سابقه في البرهنة على المصادرة الخامسة لإقليدس، وذهب إلى أن جميع براهين الرياضيات تنتمي إلى البرهان اللمى (لم) الذى برهن به على سبب وجود الشيء أو سبب خواصه. وفي رسالته في شرح ما أشكل من مصادرات كتاب إقليدس أتى الخيام بعدد من القضايا الرياضياتية الأساسية التى لا يمكن للرياضياتى الاستغناء عنها فى براهينه، ومنها انطلق الخيام فى البرهان على المصادرة الخامسة لأقليدس ممثلاً فى ثمانية أشكال كما يلي⁽¹⁾:

الشكل الأول :

خط أ ب مفروض، ونخرج أ ج عموداً على أ ب، ونجعل ب د عموداً على أ ب ومساوياً لخط أ ج. فهما متوازيان، ونصل ج د. فإن زاوية أ ج د مساوية لزاوية ب د ج.

(1) عمر الخيام النيسابورى، رسالة فى شرح ما أشكل من مصادرات كتاب إقليدس، تحقيق عبد الحميد صبرة، منشأة المعارف، الإسكندرية، 1961، ص 19 وبعدها.



البرهان :

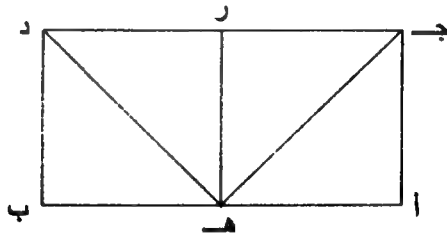
نصل جـ ب، أ د؛ فخط أ جـ مثل ب د ، أ ب مشترك. وزاويتا أ ، ب قائمتان؛ فقاعدتا أ د، جـ ب متساويتان، وسائر الزوايا مثل سائر الزوايا. فتكون زاويتا هـ أ ب، هـ ب أ متساويتين.

فخطا أ هـ، هـ ب متساويان. فيبقى جـ هـ، هـ د متساويين. فتكون زاويتا هـ جـ د، هـ د جـ متساويتين، أ جـ ب مثل أ د ب. فزاويتا أ جـ د، جـ د ب متساويتان.

ولذلك فإن زاويتا جـ أ ب، د ب أ إذا كانتا متساويتين كيفما كانتا، وخطا أ جـ، ب د متساويين، يجب أن تكون زاويتا ب د جـ ، أ جـ د متساويتين.

الشكل الثاني :

نعيد شكل أ ب جـ د، ونقسم أ ب بنصفين على هـ ، ونخرج هـ ر عموداً على أ ب؛ فإن جـ ر مثل ر د، هـ ر عموداً على جـ د.

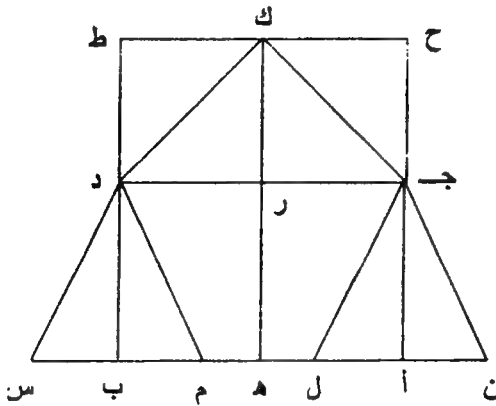


نصل ج هـ ، هـ د ؛ فخط أ ج مثل ب د ، أ هـ مثل هـ ب ؛
وزاويتا أ ، ب قائمتان. فقاعدتا ج هـ ، هـ د متساويتان، وزاويتا أ هـ
ج ، ب هـ د متساويتان. فتبقى زاويتا ج هـ ر ، ر هـ د متساويتين.

وخط ج هـ مثل هـ د ، هـ ر مشترك، والزاويتان متساويتان.
فالمثلث مثل المثلث وسائر الزوايا والأضلاع النظائر متساوية، فيكون ج ر
مثل ر د، فهما قائمتان، وهو المطلوب إثباته.

الشكل الثالث :

ونعيد شكل أ ب ج د ، فإن زاويتي أ ج د ، ب د ج قائمتان.



البرهان :

نقسم أ ب بنصفين على هـ ، ونخرج عمود هـ ر ، ونخرجه على
استقامة. ونجعل ر ك مثل ر هـ ، ونخرج ح ك ط عموداً على هـ ك.
ونخرج أ ج ، ب د فيقطعان ح ك ط على ح ، ط لأن أ ج ، هـ ك
متوازيان، ح ك ، ر ج أيضاً متوازيان.

وكل متوازيين، لا يتغير البعد بينهما. فيمر أ ج إلى مالا نهاية له موازياً هـ ك، ويمر ح ك إلى مالا نهاية له موازياً ر ج. فهما يتلاقيان لا محالة. ونصل جـ ك، د ك؛ فخط جـ ر مثل ر د، ر ك مشترك وهو عمود. فقاعدتا جـ ك، ك د متساويتان، وزاويتا ر جـ ك، ر د ك متساويتان. فتبقى زاوية ح جـ ك مثل ك د ط. وزاويتا جـ ك ر، د ك ر متساويتان. فتبقى زاويتا جـ ك ح، د ك ط متساويتين. وخط جـ ك مثل د ك. فيكون جـ ح مثل د ط، ح ط مثل ك ط.

وزاويتا أ جـ د، ب د جـ إن كانتا قائمتين فقد حق الخبر. وإن لم تكونا قائمتين فتكون كل واحدة منهما إما أصغر من قائمة وإما أكبر. فلتكن أولاً أصغر من قائمة: فينطبق سطح ح د على سطح جـ ب، فينطبق ر ك على ر هـ، ح ط على أ ب، فيكون ح ط مثل خط ن س، لأن زاوية ح جـ ر أعظم من زاوية أ جـ ر، فخط ح ط أعظم من أ ب.

وكذلك إن أخرج الخطان إلى مالا نهاية له على هذا النسق يكون كل واحد من الخطوط الواصلة أعظم من الآخر ويتسلسل، فخطا أ جـ، ب د إلى الاتساع. وكذلك إن أخرج أ جـ، ب د على استقامة من الجهة الأخرى كانا الاتساع بمثل هذا البرهان وتشابه حال الجانبين عند الانطباق لا محالة، فيكون خطان مستقيمان يقطعان مستقيماً على قائمتين، ثم يتسع البعد بينهما من جهتي ذلك الخط، وهذا محال أولى عند تصور الاستقامة وتحقق البعد بين الخطين.

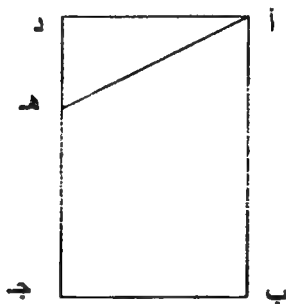
وإن كانت كل واحدة منهما أكبر من قائمة، فيكون عند الانطباق خط ح ط مثل ل م وهو أصغر من أ ب. وكذلك جميع الخطوط الواصلة على هذا النسق، فالخطان إلى التضايق. وإن أخرجا إلى الجهة الأخرى كانا إلى

التضايق أيضاً لتشابه حال الجهتين عند الانطباق. وهذا محال أيضاً لما ذكرنا.

وإذا امتنع أن يكون الخطان متفاضلين، فهما متساويان، وإذا كانا متساويين، فالزاويتان متساويتان، فهما قائمتان.

الشكل الرابع :

سطح أ ب ج د زواياه قائمة، فإن أ ب مثل ج د، أ د مثل ب ج.

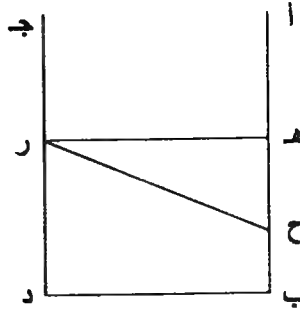


البرهان :

إن لم يكن أ ب مثل ج د، فيكون أحدهما أعظم، فليكن ج د أعظمهما، ونفصل ج هـ مثل أ ب، ونصل أ هـ. فتكون زاوية ب أ هـ مثل زاوية ج هـ أ، ب أ هـ أصغر من قائمة، ج هـ أ أعظم من قائمة لأنها خارجة عن مثلث أ هـ د، فتكون أعظم من زاوية د القائمة، وهذا محال. فخط أ ب مثل ج د، وهو المطلوب إثباته.

الشكل الخامس :

خطا أ ب، ج د متحاذيان، فإن كل خط يكون عمودياً على أحدهما، فهو عمود على الآخر.

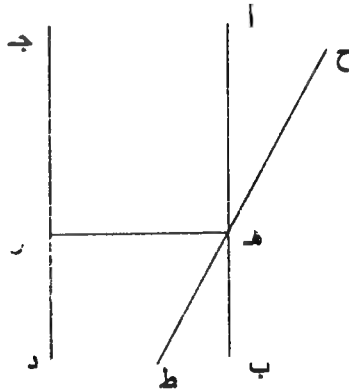


البرهان :

نخرج من نقطة هـ عموداً على جـ د، وهو هـ ر. فإن زاوية هـ قائمة. وإن خطى أ ب، جـ د حاصلان من عمود عليهما لا محالة كما بينا، وهو د. فإن كان ب هـ مثل د ر، فزاوية هـ قائمة. وإن كان أحدهما أعظم، فنفصل من الأعظم مثل الأصغر، وهو ب ح الذي فصلناه من ب هـ. زاوية ح القائمة مثل زاوية ح ر د وهي أقل من قائمة، وهذا محال. فخط ب هـ مثل ر د، وزاوية هـ قائمة. وهو المطلوب إثباته.

الشكل السادس :

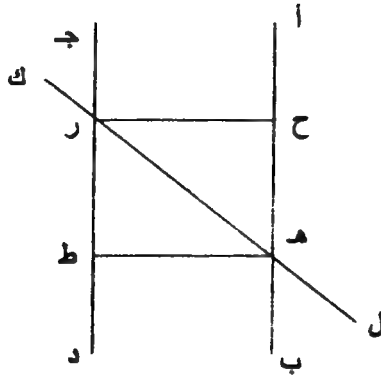
كل خطين متوازيين كما حدّه إقليدس، وهما اللذان لا يلتقيان من غير شرط آخر، فهما متحاذيان، ومثاله: أ ب، جـ د متوازيان، فإنهما متحاذيان.



نعلم نقطة هـ، ونخرج هـ ر عموداً على جـ د. فإن كانت زاوية هـ قائمة، كان الخطان متحاذيين. وإن لم تكن قائمة، فنخرج ح هـ عموداً على هـ ر. فيكون ح هـ ط، جـ ر د متحاذيين وخطاب هـ أ، ط ح متقاطعان. والبعد بين هـ ح، هـ أ يزداد إلى ما لا نهاية له. والبعد بين هـ ح، جـ ر واحد إلى ما لا نهاية له، لا يزيد ولا ينقص. فيوشك أن يصير البعد بين هـ أ، هـ ح أعظم من هـ ر، الذي هو بعد المتحاذيين. فخط هـ أ يقطع جـ ر، وقد فرضناهما متوازيين، وهذا محال. فزاوية أ هـ ر ليست بأعظم من قائمة ولا أصغر منها، فهي قائمة. فخطا أ ب، جـ د متحاذيان إذن. وهو المطلوب إثباته.

الشكل السابع :

إذا وقع خط مستقيم على خطين متوازيين، فإن الزاويتين المتبادلتين متساويتان، والزاوية الخارجة مثل الداخلة والزاويتان الداخلتان مثل قائمتين، ومثاله: خطا أ ب، جـ د متوازيان، وقد وقع عليهما خط ك ر هـ ل. فإن زاويتي ل ر د، أ هـ ر المتبادلتين متساويتان، وزاويتي أ هـ ر، جـ ر هـ الداخلتين مثل قائمتين، وزاوية جـ ر ك الخارجة مثل زاوية أ هـ ر الداخلة.

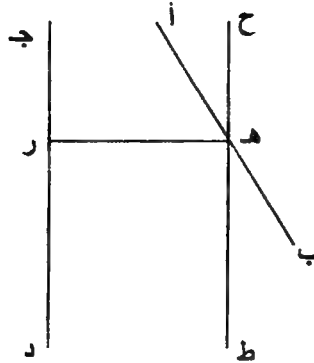


البرهان :

نخرج من نقطة هـ عمود هـ ط على جـ د، فهو عمود على أ ب
لأنهما متحاذيان. ونخرج من ر عموداً على أ ب وهو ر ح؛ فسطح هـ ط ر
ح قائم الزوايا، فالخطوط المتقابلة منه متساوية. فتكون زاوية ح هـ ر مثل
هـ ر ط، وهما متبادلتان، هـ ر ط مثل جـ ر ك، فـ جـ ر ك مثل أ هـ
ر، الداخلة مثل الخارجة، هـ ر ط مع هـ ر جـ مثل القائمتين. فزاوية أ
هـ ر مع هـ ر جـ مثل قائمتين. وهو المطلوب إثباته.

الشكل الثامن :

خط هـ ر مستقيم، وقد خرج عنه خطا هـ أ، ر جـ. وزاويتا أ هـ
ر، جـ ر هـ أقل من قائمتين؛ فإنهما يلتقيان في جهة أ.



البرهان :

نخرج الخطين على استقامة، فتكون زاوية أ هـ ر أصغر من زاوية
هـ ر د فنجعل زاوية ح هـ ر مثل هـ ر د. فخطا ح هـ ط، جـ ر د
متوازيان؛ وخط هـ ط قطع ح ط؛ فهو يقطع جـ د في جهة أ. وهو المطلوب
إثباته.

وهكذا برهن الخيام على المصادرة الخامسة لإقليدس ذلك البرهان الذى ساهم فى تطور الهندسة الحديثة، فقد افترض الخيام فروضاً ثلاثة للبرهنة على أنه إذا كانت زاويتان فى مستطيل متساوى الأضلاع تساوى كل منهما زاوية قائمة، فإن الزاويتين الأخرتين تساوى كل منهما زاوية قائمة، ويستحيل أن تكون حادة أو منفرجة، وأقام الخيام البرهان على تلك الاستحالة الحادة والمنفرجة، وانتهى إلى أنه لا يبقى إلا أن تكونا زاويتين قائمتين.

ويُعد الخيام أول من استعمل هذه الفروض الثلاثة (الزاويتان حادتان - منفرجتان - قائمتان) ومما لا شك فيه أن هذه الفروض تلعب دوراً مهماً فى الهندسات الإقليدية الحديثة، الأمر الذى جعل أحد علماء الرياضيات الغربيين وهو ساكيرى (1667-1733) ينتحلها فى نظريته عن الخطوط المستقيمة وينسبها له مؤرخو الرياضيات الغربيون، إلا أن مؤلفات عمر الخيام تثبت بما لا يدع مجالاً للشك أنه أول من أبدعها واستعملها فى تاريخ الرياضيات.

الفصل الثامن

نصير الدين الطوسي

نصير الدين الطوسي

(597هـ - 672هـ / 1201م - 1274م)

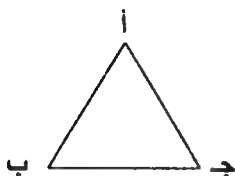
محمد بن الحسن أبو جعفر نصير الدين الطوسي، ولد في طوس، ونشأ بها حتى سن الخامسة عشر، ثم انتقل إلى نيسابور متعلماً لعدة سنوات انتهت بسقوط نيسابور في أيدي المغول سنة 625هـ / 1228م، فعاد الطوسي إلى طوس، ومنها إلى بغداد ودرس فيها على كمال الدين بن يونس من علماء بغداد عصرئذ. أجاد الطوسي اللغات الفارسية واللاتينية والتركية، وأبدع في الرياضيات والفلك، وأسند إليه المعتصم آخر خلفاء العباسيين (597هـ - 1201م) المرصد الفلكي في مراغة الذي اشتهر بآلاته الفلكية الدقيقة وأرصاده الضابطة.

ألف الطوسي ما يقرب من 145 مؤلفاً في الجبر وعلم حساب المثلثات والفلك والطبيعة والجغرافيا، منها في الرياضيات: رسالة في المثلثات الكروية، رسالة في المثلثات المستوية، الرسالة الشافية عن الشك في الخطوط المتوازية، رسالة في الموضوعات الخمسة، كتاب المعطيات لإقليدس، كتاب أرشميدس في تكسير الدائرة، كتاب جامع في الحساب، كتاب الجبر والمقابلة، كتاب قواعد الهندسة، كتاب مساحة الأشكال البسيطة والكروية، كتاب أشكال القطاعات، كتاب الأصول، مقالة تحتوي على النسب، مقالة القطاع الكروي، مقالة برهن فيها أن مجموع مربعي عددين فرديين لا يمكن أن يكون مربعاً كاملاً، مقالة في قياس الدوائر العظمى.

ويرجع الفضل للطوسى فى ابتكار وتعريف الأعداد الصم، وهى الأعداد التى ليس لها جذر، والتى لا تزال تشغل أهميتها فى الرياضيات الحديثة، اتضح ذلك من بحوثه لمعادلات صماء مثل:

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \sqrt{b} \quad \text{و} \quad \sqrt{a^2 b^2} = a^2 b^2$$

ويعد الطوسى أول من فصل علم حساب المثلثات عن علم الفلك ووضع أول كتاب فى حساب المثلثات سنة 648هـ / 1250م وهو كتاب "أشكال القطاعات" الذى دَوّن فيه أول تطوير لنظرية جيب الزاوية إلى ما هى عليه الآن، وذلك باستعماله المثلث المستوى هكذا:



$$\frac{ab}{\text{جـ} \text{ا}} = \frac{ab}{\text{جـ} \text{ب}} = \frac{ab}{\text{جـ} \text{ا}}$$

ويتكون كتاب أشكال القطاعات من خمس مقالات، تشتمل المقالة الأولى على النسب، وتحتوى الثانية على شكل القطاع السطحي، والثالثة تبحث فى القطاع الكروى، والرابعة فى القطاع الكروى والنسب الواقعة عليه، وجاءت المقالة الخامسة بمعرفة أقواس الدوائر العظمى على سطح الكرة.

ويعد هذا الكتاب أول كتاب من نوعه على مستوى العالم يفصل علم المثلثات عن علم الفلك، واعتمد مرجعاً رئيساً لكل علماء الغرب الباحثين فى علم المثلثات الكروية والمستوية بعد ترجمته إلى اللاتينية والإنجليزية والفرنسية، فدرسوه وأفادوا به إلى درجة أن بعضهم انتحل كثيراً من نظرياته ونسبها لنفسه، فالناظر فى كتاب ريجيو مونتانيوس "علم حساب المثلثات" يدرك

لأول وهلة أن كثيراً من نظرياته وأفكاره موجودة بنصها في كتاب نصير الدين الطوسى "أشكال القطاعات"!

وأظهر الطوسى براعة فائقة وخارقة للعادة - على حد قول سارتون - فى معالجة قضية المتوازيات فى الهندسة، حيث امتازت بحوثه على غيرها فى الهندسة بفضل إمامه بأسس الهندسة المستوية المتعلقة بالمتوازيات. ومن المسائل التى برهنها فيها دائرة تمس أخرى من الداخل قطرها ضعف الأولى تتحركان بانتظام فى اتجاهين متضادين بحيث تكونان دائماً متماستين، وسرعة الدائرة الصغيرة ضعف سرعة الدائرة الكبرى. كما برهن الطوسى على أن نقطة تماس الدائرة الصغرى تتحرك على قطر الدائرة الكبرى. وتعد هذه النظرية التى وضعها نصير الدين الطوسى أساس عمل الاسطرلاب.

ولأول مرة فى تاريخ الرياضيات استطاع الطوسى دراسة المثلث الكروى قائم الزاوية وإيجاد المتطابقات المثلثية التالية :

$$\overline{\text{جنا جـ}} = \overline{\text{جنا أ جتا ب}} \quad \text{ظنا أ} = \overline{\text{ظا ب جتا جـ}}$$

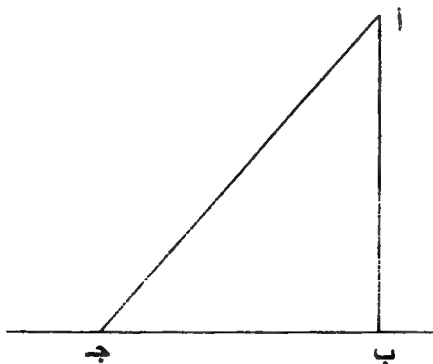
$$\overline{\text{جنا جـ}} = \overline{\text{ظنا أ ظنا ب}} \quad \overline{\text{جا ب}} = \overline{\text{جا جـ جا ب}}$$

$$\overline{\text{جنا أ}} = \overline{\text{جنا أ جا ب}} \quad \overline{\text{جا ب}} = \overline{\text{ظا أ ظنا أ}}$$

ومن أهم ما قدمه الطوسى للإنسانية جمعاء اهتمامه بالهندسة اللاإقليديسية (الفوقية) (الهندلولية) التى تلعب دوراً مهماً حالياً فى تفسيرات النظرية النسبية، ودراسة الفضاء، فقد برهن الطوسى، بكل جدارة - تبعاً لدرك ستريك - على المصادرة الخامسة من مصادرات إقليدس، ذلك البرهان

الذى بدأ به عصر جديد فى علوم الرياضيات الحديثة، ويتألف من سبع قضايا أساسية هى كما يلى⁽¹⁾:

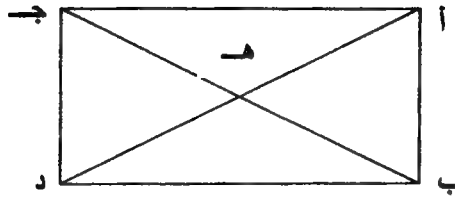
الأولى: أقصر الخطوط الخارجة من نقطة مفروضة إلى خط غير محدود ليست هى عليه، وهو المسمى ببعدها عنه، هو الذى يكون عموداً عليه.



فلتكن النقطة أ والخط ب ج، والعمود الخارج منها إليه أ ب وذلك لأننا إذا أخرجنا منها إليه خطاً آخر ك أ ج، كانت زاوية أ ج ب الحادة أصغر من زاوية أ ب ج القائمة، فيكون أ ب أقصر من أ ج، وكذلك فى غيره.

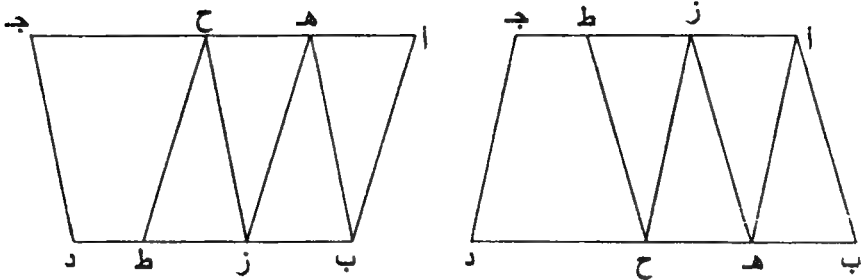
الثانية : إذا قام عمودان متساويان على خط، ووصل طرفاهما بخط آخر، كانت الزاويتان بينهما متساويتان.

(1) عبد الحميد صبره، برهان نصير الدين الطوسى على مصادرة إقليدس الخامسة، مجلة كلية الآداب، جامعة الإسكندرية، المجلد الثالث عشر، جامعة الإسكندرية 1959، ص150 وبعدها.



مثلاً إذا قام عمودا أ ب ، ج د المتساويان على ب د ، ووصل أ ج ، فحدثت بينهما زاويتا ب أ ج، د أ ج، فهما متساويان، ونصل أ د ، ب ج متقاطعين على هـ. فيكون في مثلثي أ ب د ، ج د ب ضلعاً أ ب ، ب د ؛ وزاوية أ ب د القائمة مساوية لضلعي ج د د ، ج ب؛ وزاوية ج د ب القائمة، كل لنظيره. ويقضى ذلك تساوى باقى الزوايا والأضلاع النظائر؛ ولتساوى زاويتي أ د ب ، ج ب د يكون ب هـ، د هـ متساويين، ويبقى أ هـ، ج هـ متساويين، فتكون زاويتا هـ أ ج، هـ ج د متساويتين، وكانت زاويتا د أ ب، ب ج د متساويتين، فيكون جميع زاوية ب أ ج مساوية لجميع زاوية د ج أ.

الثالثة : إذا قام عمودان متساويان على خط ووصل طرفاهما بخط، كانت الزاويتان الحادثتان بينهما قائمتين.



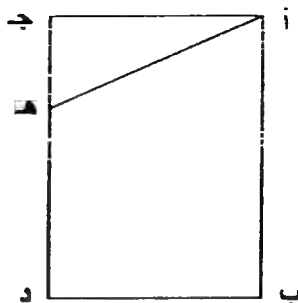
ولنعد عمودى أب، جـ د على خط ب د، ونصل أ ج؛ فإن زاويتي ب أ ج، جـ د أ المتساويتين قائمتان. وإلا لكانتا إما منفرجتين أو حادتين. فليكونا أولاً منفرجتين. ونخرج من أ العمود أ هـ على الخط أ ج، فيقع لا محالة فيما بين خطى أب، جـ د، وتكون الزاوية أ هـ د الخارجة من المثلث أب هـ أعظم من الزاوية أب هـ القائمة؛ فتكون أيضاً منفرجة. ثم نخرج من نقطة هـ العمود هـ ز على الخط هـ د، ويقع فيما بين خطى أ هـ، جـ د؛ وتكون الزاوية هـ ز جـ أيضاً منفرجة.

ثم نخرج من ز العمود ح ط على ح د، وهكذا إلى غير النهاية، فتكون الأعمدة الخارجة من النقط أ، ز، ط من الخط أ جـ على الخط ب د؛ أعنى الأعمدة أب، ز هـ، ط ح، متزايدة الأطوال على الولاء. وأقصرها العمود أ ب، لأنه يوتر الزاوية أ هـ ب الحادة؛ فهو أقصر من أ هـ الموتر للقائمة، أ هـ الموتر للزاوية أ ز هـ الحادة أقصر من ز هـ الموتر للقائمة. فـ أ ب أقصر من أ هـ، أ هـ من ز هـ؛ وكذلك ز هـ من ط ح، وعلى هذا الترتيب. ويظهر من ذلك أن أبعاد النقط التى هى مخارج الأعمدة الخارجة من خط أ جـ على خط ب د، عن خط ب د متزايدة الأطوال فى جهة جـ، فإذا ن خط أ جـ موضوع على التباعد عن خط ب د فى جهة جـ، وعلى التقارب فى جهة أ. ولكون زاوية د جـ أ أيضاً منفرجة تبين بهذا التدبير أن خط أ جـ بعينه موضوعاً على التباعد من خط ب د بعينه فى جهة أ التى كان فيها بعينها موضوعاً على التقارب منه. فإذا هو متباعد متقارب معاً من خط واحد فى جهة واحدة من غير تلاق؛ وهذا خلف.

ثم ليكونا حادتين: ونقيم الأعمدة المتوالية، إلا أنا نبتدئ بإخراج العمود من النقطة ب على خط أ جـ؛ فيقع فيما بين خطى أب، جـ د، لكون زاوية أ

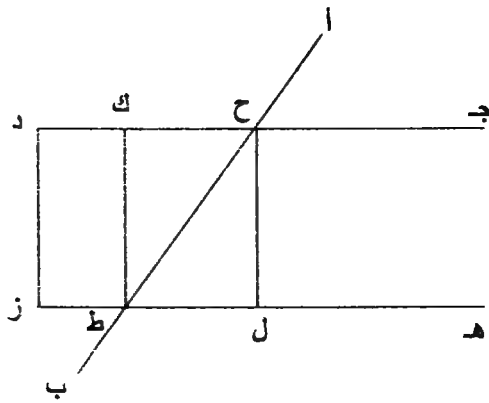
حادة، إذ لو وقع خارجاً عنهما لاجتمع في مثلث قائمة ومنفرجة، وهكذا إلى أن نخرج الأعمدة أ ب، هـ ز، ح ط المتناقصّة الأطوال على الولاء. ثم نبين بمثل ما مر أن الخط أ ج موضوع على التقارب من الخط ب د في جهة ج، وعلى التباعد عنه في جهة أ. ونبين باستتاف العمل والتدبير أنه موضوع على التباعد عنه في الجهة التي كان موضوعاً فيها على التقارب منه بعينه، وهذا خلف. فإن ثبت أن زاويتي ب أ ج، د ج أ قائمتان.

الرابعة: كل ضلعين متقابلين من سطح ذي أربعة أضلاع قائم الزوايا متساويان.



كضلعى أ ب، ج د من سطح أ ب ج د القائم الزوايا. وإلا فليكن ج د أطول؛ ونفصل د هـ مثل أ ب؛ ونصل أ هـ؛ فتكون زاويتا ب أ هـ، د هـ قائمتين لحدوثهما بين عمودى أ ب، هـ د المتساويين القائمين على ب د؛ وقد كانت زاويتا ب أ ج، د ج أ قائمتين، فالكل كالجزء؛ والخارجة كالداخلة، وكلاهما خلف، فإن الحكم ثابت.

الخامسة: كل خط يقع على عمودين قائمين على خط، فإنه يصير المتبادلتين متساويتين، والخارجة مساوية لمقابلتها الداخلة، والداخلتين في جهة معادلتين لقائمتين.

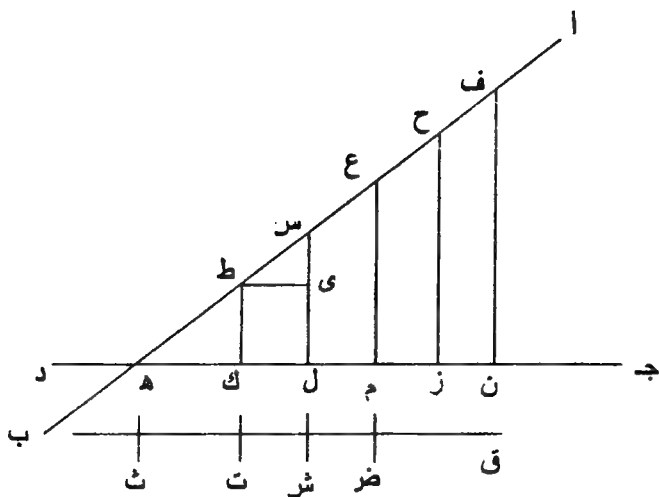


مثلاً وقع أ ب على عمودي ج د، هـ ز القائمين على د ز وقطعهما على ح، ط. فإن متبادلتى د ح ط، هـ ط ح متساويتان؛ وكذلك خارجة أ ح ج وداخلة أ ط هـ؛ وإن داخلتى ج ح ط، هـ ط ح معادلتان لقائمتين، وذلك لأن ط ز إن كان مساوياً لـ ح د كانت جميع زواياه المحيطة بنقطتى ح، ط قوائم؛ وثبت الحكم، وإلا فليكن ح د أطول. ونفصل د ك مثل ز ط، ونصل ط ك؛ ونفصل ط ل أيضاً مثل ح ك، ونصل ح ل؛ فيكون سطح ح ل ط ك قائم الزوايا.

ويكون فى مثلثى ح ل ط، ح ط ك ضلعا ح ل، ل ط، وزاوية ل مساوية لضلعى ط ك، ك ح، وزاوية ك؛ فتكون زاويتا ك ح ط، ح ط ل النظيرتان متساويتين، وهما المتبادلتان. ولكون زاوية ط ح ك مساوية لزاوية أ ح ج، تكون زاويتا أ ح ج، ح ط هـ متساويتين، وهما الخارجة والداخلة.

ولكون زاوية ج ح ط مع زاوية أ ح ج معادلة لقائمتين، فهى مع زاوية ح ط هـ أيضاً معادلة لقائمتين، وهما الداخلتان؛ وهو المطلوب إثباته.

السادسة: إذا تقاطع خطان غير محدودين على غير قوائم، وقام على أحدهما عمود؛ فبته إن أخرج قاطع الآخر فى جهة الحادة.



فليتقاطع أ ب، جـ د على هـ؛ ولتكن زاوية أ هـ جـ التي تلى أ حادة، وجارتها التي تلى ب منفرجة؛ وليقم على جـ د عمود ز ح. فإنه إن أخرج، قاطع أ ب في جهة أ. فلنعين على أ هـ نقطة ط، ونخرج عمود ك ط على جـ د؛ فلا يخلو إما أن يقع فيما بين نقطتي هـ، ز أو على نقطة ز منطبقاً على ح ز، أو خارجاً عن هـ ز.

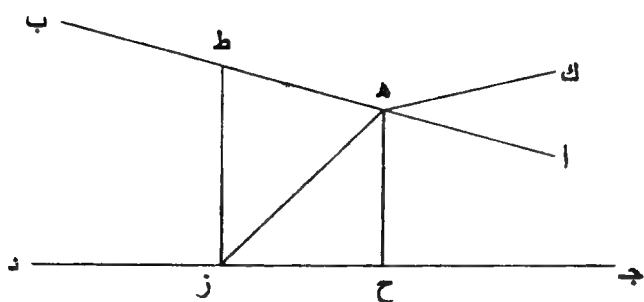
فإن وقع فيما بين ز، هـ فلنفرض خطأ ونأخذ منه أمثالاً ل هـ ك على الولاء يزيد جميعها على هـ ز، وهي ق ض، ض ش، ش ت، ت ث؛ ونفصل من هـ أ أمثالاً ل هـ ط بتلك العدة. وهي هـ ط، ط س، س ع، ع ف.

ونخرج من نقط س، ع، ف أعمدة س ل، ع م، ف ن، على جـ د؛ ومن ط عمود ط ي على س ل. فيكون في مثلثي هـ ط ك، ط ي س زاويتا هـ ط ك، هـ س ي الداخلة والخارجة متساويتين. وكذلك زاويتا هـ ك ط، ط ي س القائمتان؛ وضلعا هـ ط، ط س؛ فيكون ي ط المساوي ل ل ك لكونهما متقابلين في سطح ط ي ل ك القائم الزوايا مساوياً ل هـ ك.

وبمثل ذلك نبين أن كل واحد من ل م، م ن مساو ل هـ ك. فجميع
أقسام هـ ن متساوية، ومساوية لأقسام ق ث، وبذلك العدة ف هـ ن، ق ث
متساويان، ق ث أطول من هـ ز؛ ف هـ ن أطول من هـ ز؛ فعمود ف ن
قد وقع خارجاً عما بين نقطتي هـ، ز وصار ح ز داخل مثلث ف ن هـ.
فإن إذا أخرج عمود ح ز الموازي لعمود ف ن إلى أن يخرج من المثلث،
قاطع أ ب لا محالة في جهة ح، وهي التي تلي الحادة.

وأما إن وقع عمود ط ك على نقطة ز منطبقاً على عمود ح ز، أو
خارجاً عما بين ز، هـ، كان ثبوت الحكم أظهر، فإن الحكم ثابت.

السابعة: كل خطين وقع عليهما خط، وكانت الداخلتان في جهة أصغر من
قائمتين، فإتبعهما إن أخرجا في تلك الجهة تلاقيا.



فليكن أ ب، جـ د خطين وقع عليهما خط هـ ز، وكانت أ هـ، جـ
ز هـ داخلتين معاً أصغر من قائمتين. فإتبعهما يتلاقيان في جهة أ، جـ إن
أخرجا؛ وذلك لأنه إما أن تكون إحدى هاتين الزاويتين قائمة أو منفرجة، أو
لا تكون كذلك، بل تكونان حادتين. فإن كانت إحداهما قائمة، كانت الأخرى
حادة ويلتقيان في جهة الحادة كما مر.

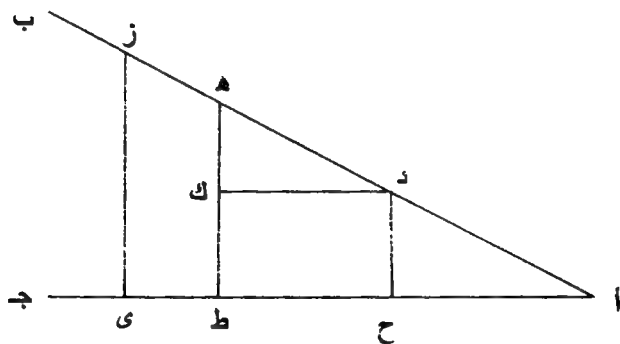
وإن كانت إحداهما منفرجة، وليكن هـ زاوية أ هـ ز، فلنخرج من هـ عمود هـ ح على أ ب، ومن ز عمود ز ط أيضاً على أ ب. فيكون لوقوع هـ ز على عمودي هـ ح، ط ز متبادلان ح هـ ز، هـ ز ط متساويتين. ولما كانت زاويتا أ هـ ز، هـ ز ح أصغر من قائمتين، وكانت زاوية أ هـ ح قائمة، يبقى زاويتا ح هـ ز، هـ ز ح معاً. يعني زاوية هـ ز ط، هـ ز ح، بل زاوية ط ز ح أقل من قائمة، وكانت زاوية أ ط ز قائمة، فإن الخطان يتلاقيان في جهة أ، جـ.

وإن كانتا حادتين، فلنخرج من هـ عمود هـ ح على جـ د، ومن ز عمود ز ط أيضاً على جـ د. وإذا ألقينا زاويتي جـ ز هـ، ز هـ ح معاً. يعني زاويتي جـ ز هـ، هـ ز ط معاً المساويتين لزاوية جـ ز ط القائمة من زاويتي أ هـ ز، جـ ز هـ، بقيت زاوية أ هـ ح أصغر من قائمة، وكانت جـ ح هـ قائمة، وإن هما يتلاقيان في جهة أ، جـ.

ولهذه القضية الأخيرة وجه آخر: وهو أن نخرج من هـ عمود هـ ك على خط هـ ز، فتكون زاوية ك هـ ز قائمة، وزاوية هـ ز جـ حادة، فيتلاقى خطا هـ ك، ز جـ، ويتلقى هـ أ، ز جـ لا محالة إن أخرج في جهة جـ.

ولبيان هذه القضية وجه آخر يتم بثمانين قضاياء، خمس منها هي هذه التي مرت من الأولى إلى الخامسة، وثلاث هي هذه:

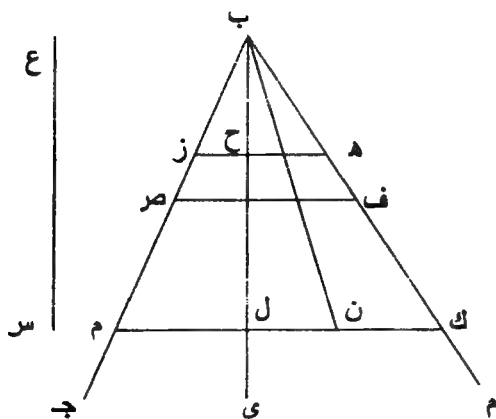
السادسة: كل زاوية حادة فصل من أحد ضلعها خطوط متساوية على الولا، وأخرج من تلك المفصل أعمدة على الضلع الآخر، فالخطوط التي تفصلها مواقع الأعمدة من ذلك الضلع متساوية أيضاً.



فلتكن الزاوية ب أ ج، وقد فصل من أ ب خطوط أ د، د هـ، هـ ز متساوية، وأخرج من د، هـ، ز أعمدة د ح، هـ ط، ز ي على خط أ جـ. فإن خطوط أ ح، ح ط، ط ي المفصولة بها أيضاً متساوية. فلنعمل على د من خط هـ د زاوية هـ د ك مثل زاوية أ، ونخرجه إلى ك، فيكون فى مثلثى أ ح د، د ك هـ زاويتا ح أ د، ك د هـ متساويتين.

وكذلك زاويتا أ د ح، د هـ ك الخارجة والداخلية، وكذلك ضلعا أ د، د هـ، ف أ ح مساو ل د ك، وزاوية أ ح د القائمة مساوية لزاوية د ك هـ، فيكون سطح د ك ط ح قائم الزوايا، د ك منه يساوى ح ط، يعنى أ ح، وبمثل ذلك نبين أن ط ي أيضاً مساو ل أ ح.

السابعة: كل زاوية فرضت نقطة فيما خطيها، فإنه يمكن أن يوصل بينهما بخط مستقيم يمر بتلك النقطة.



فلنفرض نقطة د بين خطى أ ب، ب جـ المحيطين بزاوية أ ب جـ،
وندير على مركز ب ويبعد ب د قوس هـ د ز المار بنقطة د، ونصل وتر
هـ ز، وننصف زاوية هـ ب ز بخط ب ح إلى حادتين. فيكون فى مثلثى
هـ ب ح، ز ب ح ضلعا هـ ب، ب ح وزاوية هـ ب ح مساوية لضلعى ز
ب، ب ح، وزاوية ز ب ح، فتكون زاويتا ب ح هـ، ب ح ز متساويتين، بل
قائمتين.

ونخرج ب ح إلى ي، فيقطع قوس هـ د ز على ط، ونأخذ لـ ب ح
أضعافاً يزيد مجموعها على ب ط، ولتكن تلك الأضعاف خط ع س، ونفصل
من ضلع ب أ أمثالا لـ ب هـ. ويكون عدتها عدة تلك الأضعاف، وهى ب
هـ، هـ ك. ونخرج من أطراف تلك الخطوط، وهى هـ، ك أعمدة هـ ح،
ك ل على ب ي، فينفصل منه ب ح، ح ل متساويين، ويكون مجموعهما
المساوى لـ ع س أطول من ب ط، فيكون موقع عمود ك ل على ب ي، وهو
نقطة ل، خارجاً عن ب ط.

ونفصل من ب جـ، ب م مثل ب ك، ونصل م ل، فيكون فى مثلثى
ب ك ل، ب م ل ضلعا ك ب، ب ل وزاوية ك ب ل مساوية لضلعى م ب،

مثلث $\triangle ABC$ ب $\angle C$ أكبر من $\angle A$ ، ونعمل على نقطة D على AC من خط BC زاوية $\angle C$ مثل زاوية $\angle A$ ، ونخرج CD إلى أن يقطع BC في K .

وإذا تقدم ذلك، فإن $\triangle ABC$ ، $\triangle DCB$ يتلاقيان، لأننا لو توهمنا تطبيق $\triangle ABC$ على $\triangle DCB$ المساوي له، انطبق D على B على K لتساوي زاويتي $\angle C$ K ، B D ، و $\angle A$ على $\angle C$ لتساوي زاويتي $\angle C$ K ، D B أفتلاقيان ضرورة على نقطة K . وهو المطلوب إثباته.

وهكذا توصل الطوسي وبرهن على أن مجموع زوايا أي مثلث تساوي قائمتين، وذلك يكافئ المصادرة الخامسة من مصادرات إقليدس، وبذلك يكون الطوسي قد وضع أساس الهندسة اللاإقليدية الحديثة والتي تقتصر بأسماء علماء غربيين من أمثال: كارل فاوس الألماني (ت 1855)، ونيكوليا لوباتشوفسكي الروسي (ت 1856)، ودولفغان بولياي المجري (ت 1856)، وبرنهارد ريمان الألماني (ت 1866)، فهورد إيفز يذكر أن جرولا سكير الإيطالي (ت 1733) المسمى بأبي الهندسة اللاإقليدية قد اعتمد بصورة أساسية على عمل نصير الدين الطوسي في هذا الميدان من الهندسة. ويدرس جان والس (ت 1703) الرياضياتي الإنجليزي الشهير برهان نصير الدين الطوسي على المصادرة الخامسة لإقليدس، ويخرج من دراسته معترفاً بفضل نصير الدين الطوسي في وضع الهندسة اللاإقليدية وظهور فجر الرياضيات الحديثة.

الفصل التاسع

ابن البناء المراكشى

ابن البناء المراكشى

(654 - 731 هـ / 1256 - 1321 م)

أبو العباس أحمد بن محمد عثمان الأزدي بن البناء نسبة إلى أبيه الذى كان يعمل بحرفة البناء، والمراكشى نسبة إلى مدينة مراكش التى ولد بها وتعلم فيها على مشاهير العلماء حتى أجاد الفقه والنحو، ثم انتقل إلى مدينة فاس طالباً للرياضيات والفلك والطب، وقطع شوطاً كبيراً فى الطلب حتى أجاد ونبغ خاصة فى الرياضيات التى لقب مع تفوقه فيها "بالعددى" وصار استاذاً مرموقاً يأتى إليه طلاب العلم من كل حذب وصوب للتلمذ عليه، وكان من أشهرهم عبد الرحمن بن خلدون.

ألف ابن البناء ما يربو على سبعين كتاباً ورسالة معظمها فى الحساب والهندسة والعدد والجبر والفلك، إلا أن أكثرها ضائع، وبقي منها عدد قليل يكشف عن نظريات ابن البناء الرياضياتية وما أسداه من تطور للحساب والعدد امتد إلى العصر الحديث، ومن أهم هذه المؤلفات: تلخيص أعمال الحساب، التمهيد والتيسير فى قواعد التكسير، رسالة بالتناسب، رسالة فى تحقيق رؤية الأهلة، رسالة فى الجذور الصم جمعها وطرحها، رسالة فى العدد التام والناقص، رسالة فى علم الحساب، رسالة فى علم المساحة، رسالة فى علم الجداول، رسالة فى كروية الأرض، رسالة فى الأنواء، كتاب الأصول والمقدمات فى الجبر والمقابلة، كتاب أحكام النجوم، كتاب الاسطرلاب واستعماله، كتاب تحديد القبلة، كتاب تنبيه الألباب، كتاب الجبر والمقابلة، كتاب رفع الحجاب عن علم الحساب، كتاب القانون لترحيل الشمس والقمر فى

المنازل ومعرفة أوقات الليل والنهار، كتاب مدخل النجوم وطبائع الحروف، كتاب المناخ، مقدمة أقليدس، المقالات في الحساب.

ارتبطت شهرة ابن البناء المراكشي بكتابه تلخيص أعمال الحساب الذى قسمه إلى قسمين، يبحث الأول فى العدد المعلوم ومراتبه وجمعه وطرحه وضربه وقسمته، وجمع الكسور وطرحها وقسمتها، وجمع الجذور وطرحها وضربها وقسمتها. ويتناول فى القسم الثانى الجبر والمقابلة والنسبة.

ومن مسائل الكتاب الرئيسة التى شغلت اهتمام ابن البناء كيفية إيجاد القيمة التقريبية للجذر الأصم⁽¹⁾، فابتكر صيغة للعدد الأصم يمكن بمقتضاها الوصول إلى القيمة التقريبية لجذر العدد الأصم، وهذه الصيغة هى: $\sqrt[2]{\text{ب} + 4}$ وأعطى مثلاً لذلك بإيجا القيمة التقريبية لجذر العدد الأصم (13) هكذا:

$$\sqrt[2]{\text{ب} + 4} = \sqrt{13} = \sqrt{4 + 9}$$

$$\text{إذن } 3 = \text{ب} ، 4 =$$

ولذلك فإن

$$3.44 = 3 + \frac{4}{9} = \frac{4}{9} + 3 = \frac{4}{1 + (4)2} + 3 = \frac{\text{ب}}{1 + 2\text{ب}} + 3$$

وتلك هى القيمة التقريبية لجذر العدد الأصم (13).

وفى رسالته فى الأعداد التامة والناقصة والزائدة والمتحابة اهتم ابن البناء اهتماماً كبيراً بهذه الأعداد، ومع أنه سلك مسلك ثابت بن قرّة فيما يخص

(1) ابن البناء المراكشى، تلخيص أعمال الحساب، مخطوط مكتبة المخطوطات التونسية، رقم 307 ر.

الأعداد المتحابية، إلا أنه بحث بحثاً جديداً مبتكراً في التامة والناقصة والزائدة من الأعداد، عمل على تطور علم الحساب والعدد في العصور اللاحقة وامتد إلى العصر الحديث. ويمكن الوقوف على ذلك بشيء من الاختصار فيما يلي⁽¹⁾:

الأعداد التامة :

إذا كان $n = 2$ ، فإن $2^2 - 1 = 3$ عدد أولي $\leftarrow 2(2^2 - 1) = 6$
عدد تام

إذا كان $n = 3$ ، فإن $2^3 - 1 = 7$ عدد أولي $\leftarrow 2^2(2^3 - 1) = 28$
عدد تام.

إذا كان $n = 4$ ، فإن $2^4 - 1 = 15$ عدد غير أولي \leftarrow
 $2^3(2^4 - 1) = 120$ عدد غير تام.

إذا كان $n = 5$ ، فإن $2^5 - 1 = 31$ عدد أولي \leftarrow
 $2^4(2^5 - 1) = 496$ عدد تام.

الأعداد الزائدة :

12 أجزاؤه : 6، 4، 3، 2، 1 $\leftarrow 6 + 4 + 3 + 2 + 1 = 16$ ،
إن 12 عدد زائد.

20 أجزاؤه : 10، 5، 4، 2، 1 $\leftarrow 10 + 5 + 4 + 2 + 1 = 22$

(1) ابن البناء المراكشي، رسالة في الأعداد التامة والزائدة والناقصة والمتحابية، تحقيق محمد سويسى، مجلة الجامعة التونسية، العدد 13، 1976.

22، إذن 20 عدد زائد.

24 أجزاؤه : 12، 8، 6، 4، 3، 2، 1 ← $3 + 4 + 6 + 8 + 12$

$1 + 2 = 36$ ، إذن 24 عدد زائد.

الأعداد الناقصة :

44 أجزاؤه : 12، 11، 4، 2، 1 ← $1 + 2 + 4 + 11 + 12$

30، إذن 44 عدد ناقص.

إن أهمية العالم إنما تقاس بما قدمه من تطوير لعلمه الذى يبحث فيه، وقد قدم ابن البناء من الأفكار والنظريات الرياضياتية المبتكرة ما أدت إلى تطوير وتقدم علم الرياضيات فى الحضارة الإسلامية وفى العصور اللاحقة، يدلنا على ذلك أن كتاب تلخيص أعمال الحسابي لابن البناء نال اهتمام علماء الرياضيات فى العصور اللاحقة له، فدرسوه، وخصوه وشرحوه شروحات متعددة، منها: شرح عبد العزيز الهرارى أحد تلاميذ ابن البناء، وشرح ابن المجدى فى النصف الثانى من القرن الثامن الهجرى / الرابع عشر الميلادى، وشرح ابن زكريا الإشبيلي، وفى القرن التاسع الهجرى / الخامس عشر الميلادى قدم القلصادى شرحين لكتاب تلخيص أعمال الحساب، لخص فى الشرح الصغير منهما بعض أفكار ونظريات ابن البناء الرياضياتية وعرضها فى سهولة تتناسب مع احتياجات الإنسان الحسابية اليومية. أما الشرح الكبير فقد برهن فيه على نظريات ابن البناء وحل كثيراً من المسائل الصعبة، وزاد عليه خاتمة تبحث فى الأعداد التامة والزائدة والناقصة. وبقي هذا الشرح من المراجع الرياضياتية الرئيسة على الجانبين، العربى والغربى.

وفى النصف الأخير من القرن التاسع عشر الميلادى ترجم أريستيدمار كتاب تلخيص أعمال الحساب لابن البناء إلى اللغة الفرنسية، وبعد أن درسه دراسة وافية، قرر أن كثيراً ممن النظريات الرياضياتية المنسوبة لعلماء غربيين هي نظريات ابن البناء المراكشى، وهذا ما حدا بديفيد سميث أن يذكر أن كتاب تلخيص أعمال الحساب لابن البناء يشتمل على بحوث كثيرة فى الكسور ونظريات لجمع مربعات الأعداد ومكعباتها وقانون الخطأين لحل المعادلة من الدرجة الأولى. وقدم ابن البناء - بحسب فرانسيس كاجورى - خدمة عظيمة بإيجاده الطرق الرياضياتية البحتة وإيجاده القيم التقريبية لجذور الأعداد الصم، ولذا رأى جورج سارتون أن كتاب تلخيص أعمال الحساب لابن البناء المراكشى يحتوى على نظريات حسابية وجبرية مفيدة، إذ أوضح العويس منها إيضاحاً لم يسبقه إليه أحد، لذا يُعد كتابه من أحسن الكتب التى ظهرت فى علم الحساب.

الفصل العاشر

الكاشي

الكاشي

(ت 839هـ / 1436م)

غياث الدين جمشيد بن مسعود بن محمد الكاشي، ولد في مدينة قاشان - كاشان ببلاد فارس (إيران حالياً) لأب كان من أكبر علماء الرياضيات والفلك في عصره، فدرس الكاشي النحو والصرف والفقه على المذاهب الأربعة فأتَمّها حتى أصبح فقيهاً معتبراً، فضلاً عن حفظه القرآن الكريم والذي أشتهر بختمه يومياً، الأمر الذي انعكس على أسلوبه في الكتابة فيما بعد فجاء سهلاً رزينا. ثم درس الكاشي المنطق واستفاد به في دراسة الرياضيات والفلك فأظهر نبوغاً مبكراً فيهما.

عاش الكاشي معظم حياته في سمرقند، وبنى فيها مرصداً عُرف بمرصد سمرقند وامتاز بدقّة أرساده. وفي سمرقند وضع الكاشي أكثر مؤلفاته التي أشتهر بها، وهو يُعد أحد العلماء الثلاثة الذين اشتهروا باهتمامهم بالعلوم الرياضياتية والفلكية، وهم: قاضي زاده، وعلى القوشى، والكاشي هؤلاء الذين اشتغلوا في مرصد سمرقند وعاونوا أولغ بك في إجراء الأرصاد وعمل الأزياج، وكان هذا المرصد أحد عجائب زمانه، خاصة وأن أولغ بك قد زوده بالأدوات الكثيرة والآلات الفلكية الدقيقة، وفيه شرح الكاشي كثير من إنتاج علماء الفلك الذين عملوا مع نصير الدين الطوسي في مرصد مراغة، كما حقق جداول النجوم التي وضعها الراصدون في ذلك المرصد، ووضع معظم مؤلفاته الفلكية، ومنها: جداول فلكية معروفة باسم الزيج الجرجاني، رسالة في المجسطي، رسالة سلم السماء، زيج التسهيلات، زيج الخاقاني وهو عبارة عن

تصحيح زيچ الإيلخانى للطوسى، حيث دقق فيه جداول النجوم التى وضعها الراصدون فى مراغة تحت إشراف نصير الدين الطوسى، وزاد على ذلك من البراهين الرياضياتية والأدلة الفلكية مما لم يوجد فى الأرياح التى عملت قبله، نزهة الحدائق وهو كتاب يبحث فى استعمال الآلة المسماة (طبق المناطق) والتى وضعها لمرصد سمرقند، وبواسطة هذه الآلة يمكن الحصول على تقاويم الكواكب وعرضها وبعدها، مع الخسوف والكسوف وما يتعلق بهما، كتاب فى علم الهيئة، رسالة عمر إهليلجى القمر وعطارد، وهى أهم مؤلفات الكاشى الفلكية حيث درس فيها وتتبع مدارات القمر وعطارد واستطاع أن يكتشف كشافاً فلكياً عُد الأول من نوعه، وهو أن مدارات القمر وكوكب عطارد إهليلجية أى ذات شكل بيضاوى، هذا الكشف الذى ادعاه يوهان كيبلر (1571-1631) ونسبه لنفسه زوراً وافتراءً على صاحبه الكاشى، والذى قدر أيضاً كسوف الشمس تقديراً دقيقاً خلال ثلاث سنوات، بين 809-811هـ / 1407-1409م.

أما فى الرياضيات فقد وضع الكاشى مجموعة من المؤلفات أفادت منها الأجيال العلمية اللاحقة، وامتد تأثيرها إلى العصر الحديث، ومن أهمها: الرسالة المحيطية، رسالة فى التضعيف والتصنيف والجمع والتفريق، رسالة الجذور الصم، رسالة الجيب والوتر، رسالة فى الحساب، رسالة فى الهندسة، رسالة فى المساحات، رسالة فى معرفة النداخل والتشارك والتباين، رسالة الوتر والجيب فى استخراجها لثلاث القوس المعلوم والوتر والجيب، مفتاح الحساب⁽¹⁾، مقالة فى الأعداد، مقالة فى الكسور العشرية والاعتيادية، مقالة فى

(1) حققه نادر النابلسى ونشره بدمشق سنة 1977.

استخراج المجهول، مقالة فى طريقة استخراج الضلع الأول من المضلعات كالجزر والكعب.

ويأتى على قمة هذه المؤلفات من حيث الأهمية كتاب الحساب، وضعه الكاشى ليكون مرجعاً فى تدريس الحساب لطلاب العلم، وضمّنه بعض اكتشافاته الرياضياتية. وظل هذا الكتاب منهلاً استقى منه علماء الشرق والغرب، واعتمدوه فى المدارس والجامعات لعدة قرون، كما استخدموا كثيراً من النظريات والقوانين التى ابتكرها وبرهنها ومنها ما يلى:

ابتكر الكاشى الكسور العشرية، فالخلاف بين علماء الرياضيات كبير - على حد قول سميث - ولكن غالبيتهم يتفق على أن الكاشى هو الذى ابتكر الكسر العشرى، ويعترف سميث بأن المسلمين فى عصر الكاشى سبقوا الأوربيين فى استعمال النظام العشرى، وأنهم كانوا على معرفة تامة بالكسور العشرية.

ولا يخفى ما لهذا الابتكار من أثر بالغ فى اختراع الآلات الحاسبة.

ووضع الكاشى قانوناً خاصاً بتحديد قياس أحد أضلاع مثلث انطلاقاً من قياس ضلعيه الآخرين وقياس الزاوية المقابلة له.

وفى كتابه "رسالة المحيطية" بحث الكاشى كيفية تعيين نسبة محيط الدائرة إلى قطرها، وقد أوجد الكاشى تلك النسبة - على حد قول سميث - إلى درجة من التقريب لم يسبقه إليها أحد، وتكاد تعادل النسبة التى استخرجها علماء القرن العشرين بالآلات الحاسبة، فوصلت نسبة الكاشى إلى 16 خانة عشرية، وقيمتها: 3.1415926535898732.

وتوصل الكاشى إلى قانون خاص بمجموع الأعداد الطبيعية أو المتسلسلة العددية المرفوعة إلى القوة الرابعة، وهو قانون لا يمكن التوصل إليه بقليل من النبوغ على رأى كرادى فو. فقد وصل علماء الحضارة الإسلامية قبل الكاشى إلى قوانين عدة فى مجموع الأعداد الطبيعية المرفوعة إلى القوة الأولى والثانية والثالثة وزاد الكاشى بوضع قانون مجموع الأعداد الطبيعية المرفوعة إلى القوة الرابعة. وهذا القانون تبعاً لديفيد سميث هو:

$$\text{مجموع } n^4 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 = \text{مجموع } n^4 - \text{مجموع } n^2$$

$$\text{مجموع } n^4 = 1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4$$

$$\text{مجموع } n^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$$

$$\text{مجموع } n = 1 + 2 + 3 + \dots + n$$

ومما لاشك فيه أن هذا القانون أدى إلى تطور علم الأعداد تطوراً ممتداً منذ الكاشى وحتى العصر الحديث.

ولقد استطاع الكاشى إيجاد خوارزمية لحساب الجذور النونية لأى عدد والتي عدت حالة خاصة للطرق التى اكتشفت بعد ذلك بقرون فى العصر الحديث بمعرفة "هورنر".

وإذا كان مؤرخو الرياضيات الغربيون ينسبون نظرية "ذات الحدين" لإسحاق نيوتن، أو غيره من الغربيين، فإن منهم من يعترف بأن صاحبها هو الكاشى، ففي كتابه "مصادر الرياضيات خلال 1200 - 1800 ميلادية" يقرر دريك سترويك أن الكاشى هو أول من فكر فى طريقة ذات الحدين، ويرجع له الفضل فى تطوير خواص معاملاتها.

فاستخدم الكاشى لإيجاد حدود المعادلة الجبرية قاعدة عمر الخيام،
وطورها وجعلها قاعدة عامة لنظرية ذات الحدين لأى أس صحيح مثل:

$$(س + ص)^4 = س^4 + 4 س^3 ص + \frac{3 \times 4}{2} س^2 ص^2 + 4 س ص^3 + ص^4$$

$$س^2 ص^2 + \frac{2 \times 3 \times 4}{3 \times 2} س ص^3 + ص^4$$

ولا يغين عن البال ما لنظرية ذات الحدين من أهمية فى الرياضيات
حتى الآن.

الفصل الحادى عشر

القلصادى

(825-891 هـ / 1426-1492م)

أبو الحسن على بن محمد القرشى البسطى الملقب بالقليصادى، ولد ونشأ بمدينة بسطة فى الأندلس، وطلب العلم فى شبابه بها متلمذاً على كبار علمائها، ثم انتقل إلى غرناطة زيادة فى العلم، وظل دارساً بها حتى تتخرج وصار فقيهاً من فقهاء المالكية وعالماً فى الرياضيات. وقد عاصر القليصادى السنوات الأخيرة لغرناطة قبل سقوطها، وشارك فى المقاومة ضد الصليبيين، ثم غادر إلى شمال أفريقيا، واشتغل بالعلم هناك إلى أن توفى قبل سقوط غرناطة من المسلمين بست سنوات.

ألف القليصادى ما يقترب من العشرين كتاباً فى الإسلام وفرائضه والفقه والمنطق، إلا أن معظم مؤلفاته تركزت فى الرياضيات وخاصة الحساب والجبر، وهى: الواضحة فى مسائل الأعداد اللانحة، رسالة فى قانون الحساب، رسالة فى معانى الكسور، شرح الإرجوزة الياسيمية فى الجبر والمقابلة، شرح إيساغوجى فى المنطق، شرح تلخيص ابن البناء، شرح ذوات الأسماء، كتاب أشرف المسالك إلى مذهب مالك، كتاب بغية المبتدئ وغنية المنتهى، كتاب تبصرة فى حساب الغبار، كتاب تقريب الموارد ومنتهى العقول البواحد، الكتاب الضرورى فى علم الموارد، كتاب كشف الجلباب عن علم الحساب، كتاب النصيحة فى السياسة العامة والخاصة، كتاب هداية الإمام فى مختصر قواعد الإسلام، كشف الأسرار فى الجبر، كشف الأسرار عن علم الغبار، وهو أهم مؤلفات القليصادى الرياضياتية، وبه ارتبطت شهرته، ضمنه اكتشافاته وابتكاراته التى لا تزال معروفة ومستخدمة حتى اليوم.

قسم القلصادى كتابه إلى أربعة أجزاء وخاتمة، الجزء الأول فى العدد الصحيح ويشتمل على سبعة أبواب، الباب الأول فى الضرب، الباب الثانى فى الطرح، الباب الثالث فى الجمع، الباب الرابع فى القسمة، الباب الخامس فى حل الأعداد، الباب السادس فى التسمية، الباب السابع فى الاختبار، ويبحث الجزء الثانى من الكتاب فى الكسور ويحتوى على مقدمة وثمانية أبواب، تشتمل المقدمة على أسماء الكسور العشرة من النصف إلى الجزء، الباب الأول فى جمع الكسور، الباب الثانى فى طرح الكسور، الباب الثالث فى ضرب الكسور، الباب الرابع فى قسمة الكسور، الباب الخامس فى تسمية الكسور، الباب السادس فى جبر الكسور، الباب السابع فى خط الكسور، الباب الثامن فى الضرب، وهو انتقال الكسر من اسم إلى غيره. ويبحث الجزء الثالث من الكتاب فى الجذور، ويتضمن مقدمة وثمانية أبواب، تتناول المقدمة معنى كلمة جذر كعدد يضرب فى مثله، فيخرج منه المطلوب، أما الباب الأول ففى أخذ جذر العدد الصحيح المجذور، الباب الثانى فى أخذ جذر العدد غير المجذور بالتقريب، الباب الثالث فى تدقيق التقريب، الباب الرابع فى تجذير الكسور، الباب الخامس فى جمع الجذور، الباب السادس فى ضرب الجذور، الباب السابع فى قسمة الجذور وتسميتها، الباب الثامن فى ذى الأسين. أما الجزء الرابع ففى استخراج المجهول، ويتكون من ثمانية أبواب، الباب الأول فى الأعداد المتناسبة، الباب الثانى فى العمل فى الكفات، الباب الثالث فى الجبر والمقابلة، الباب الرابع فى ضرب المركبات، الباب الخامس فى جمع الأجناس المختلفة والمتفقة من علم الجبر والمقابلة، الباب السادس فى الطرح، الباب السابع فى الضرب، الباب الثامن فى القسمة. وتحتوى خاتمة الكتاب على أربعة فصول، الأول فيما إذا كان فى المعادلة استثناء، الفصل الثانى فى

الجمع على نحو بيوت الشطرنج، الفصل الثالث فى موضوع المسألة المركبة وهل فيها عدد، الفصل الرابع فى استخراج العدد التام والناقص.

يعد القلصادى أول من استعمل الإشارات والرموز الجبرية المستعملة فى علم الجبر حتى الآن، فأشار إلى الجذر بحرف "جـ"، وإلى المجهول بالحرف الأول من لفظة شىء (ش) يعنى (س)، وإلى مربع المجهول بالحرف الأول من لفظة (مال) (م) يعنى س²، وإلى مكعب المجهول بحرف (ك) يعنى س³، وإلى علامة يساوى بالحرف "ل"، وبثلاث نقاط هكذا (∴) أشار إلى النسبة.

ودون القلصادى رموزه هذه فى كتابه كشف الأسرار عن علم الغبار الذى امتدت أهميته من المسلمين إلى الغرب الذى ترجمه إلى اللاتينية وأفاد بما فيه، حتى أن أحد علماء الذى اشتهر بعلم المثلثات والهندسة والجبر، وهو فرانسوافيته (1540-1603) قد أخذ رموز القلصادى فى مبدأ استعمال الرموز فى الغرب ونسبها لنفسه وتوسع فيها بالشكل المعروف حالياً.

ويعترف أحد مؤرخى الرياضيات الغربيين وهو فرانسيس كاجورى بأن القلصادى قد استخراج قيمة تقريبية للجذر التربيعى للكمية (أ² + ب) وجاءت هكذا $\frac{3\sqrt{4} + \sqrt{4}}{4}$ وهذه القيمة التقريبية أخذها علماء الرياضيات الغربيين وخاصة ليوناردو أف بيزا الإيطالى ومواطنه تارتاليا وغيرهما واستعملوها فى إيجاد القيم التقريبية للجذور الصم، مثل إيجاد القلصادى القيمة التقريبية للجذر التربيعى $\sqrt{5}$ لثلاثة أرقام عشرية هكذا:

$$1 = \sqrt{1} \quad , \quad 2 = \sqrt{1 + 2^2} = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$$

$$\frac{(1)(2)3+^3(2)4}{1+^2(2)4} = \frac{3+^34}{ب+^24} \text{ فإذن}$$

$$2 \frac{4}{17} = \frac{38}{17} = \frac{6+32}{17} = \frac{6+(8)4}{17} =$$

$$2.235 = 2 \frac{4}{17} = \sqrt{5}$$

$$\text{والقيمة الحديثة لـ } 2.2361 = \sqrt{5}$$

ولإيجاد الجذور لأى عدد اتبع علماء الرياضيات فى الحضارة الإسلامية قبل القلصادى هذه الطريقة:

$$\sqrt{د + 2أ} = أ + \frac{د}{2أ}$$

$$\text{وأيضاً إذا كانت } د < أ : \sqrt{د + 2أ} = أ + \frac{د}{1+أ2}$$

ابتكر القلصادى تطويراً لهذه الطريقة بوضعه شروطاً ضابطة لها وهى:

$$\text{إذا كان } د > أ \text{ فإن } \sqrt{د + 2أ} = أ + \frac{د}{2أ}$$

$$\text{وإذا كان } د < أ \text{ فإن } \sqrt{د + 2أ} = أ + \frac{د}{(1+أ)2}$$

وبتطبيق هذه الشروط تمكن القلصادى من استخراج قيمة الجذور بطريقة أسهل وأكثر حيوية من ذى قبل، وهذا يُعد تطويراً مهماً ألحقه القلصادى بعلم الجبر.

ويمكن أن نضرب مثلاً بإيجاد القلصادى قيمة جذر $\sqrt{11}$ هكذا:

$$\sqrt{11} = \sqrt{2+9} = \sqrt{2+3^2} \leftarrow أ=3، د=2$$

لذلك فإن $أ < د$.

$$\text{إذن } \sqrt{أ^2 + د} = \frac{د}{2} + أ.$$

$$\text{لذا فإن } 3.333 = 3 \frac{1}{3} = 3 \frac{2}{(3) 2} = \sqrt{11}$$

وقيمة الجذر التقريبي الحديث للعدد 11 هي 3.3166.

وأوجد القلصاوى القيمة التقريبية للعدد (13) هكذا:

$$\sqrt{13} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{4 + 3^2} \leftarrow أ = 3 ، د = 4.$$

لذلك فإن $د < أ$.

$$\text{إذن } \sqrt{أ^2 + د} = أ + \frac{د}{(1 + أ) 2}$$

$$\text{لذا فإن } 3.625 = 3 \frac{5}{8} = \frac{5}{8} + 3 = \frac{1 + 4}{(1 + 3) 2} + 3 = \sqrt{13}$$

وقيمة الجذر التقريبي الحديث للعدد 13 هي 3.606.

ومن هنا يتضح مدى إسهام آخر المؤلفين الكبار من أهل الأندلس وهو القلصاوى فى تطور الرياضيات، وخاصة علم الحساب وعلم الجبر، فقد أسدى للإنسانية خدمة جليلة بتطويره علم الجبر، ذلك التطوير الذى ظل ممتداً منذ عصره وحتى العصر الحديث، وليس أدل على ذلك من أن مؤلفاته فى الحساب والجبر، وخاصة كتابه "كشف الأسرار عن علم الغبار" ظلت معيناً ينهل منه طلاب العلم فى الغرب حتى القرن العشرين.

نتائج الدراسة

سجلت فى بعض صفحات هذا الكتاب بعض الاستنتاجات والنتائج التى لم يتحتم تأجيلها، وبعد أن استعرضت كل جوانب الموضوع - من وجهة نظرى - على الآن أن استخلص النتائج من خلال الإجابة على الإشكالية الرئيسة التى طرحتها فى مقدمته، وفى سبيل ذلك أ طرح النتائج الآتية:

بيّنت الدراسة فى المدخل التمهيدي كيف بدأت رياضيات ما قبل التاريخ بدايات بديهية من خلال وجود جماعات عديدة سواء فى الإنسان أو الحيوان مثل عدد الأصابع وعدد الأرجل، ثم استعان إنسان العصور القديمة بالحصى لعد الأشياء، ومنها جاءت لفظة إحصاء. وأوضحت الدراسة كيف ارتبطت الرياضيات فى الحضارة المصرية القديمة بالناحية العملية، الأمر الذى جعل المصريون يرتقون بها ويطورونها، فلقد عرفت مصر القديمة الرياضيات والحساب أكثر من سواها، وذلك لإرتباط العمليات الرياضياتية بالبناء الهندسى للمعابد والأهرام والمقابر الفرعونية الكبرى، فسجل المصريون فى تاريخ علم الرياضيات معلومات مهمة فى الحساب والهندسة والمتواليات الهندسية والحسابية، ومعادلة الدرجة الثانية تلك التى نقلها عنهم فيثاغورث اليونانى بعد زيارته لمصر، وصاغ منها نظريته المعروفة باسمه.

ووقفت الدراسة على اختراع البابليين للأحرف الهجائية وتدوينهم الأرقام والأعداد بها طبقاً للترتيب الأبجدي، ووضعهم جداول للمربعات والمكعبات. وحسب البابليون والسومريون مساحة المستطيل وشبه المنحرف والمثلث القائم، ووقفوا على تشكيل ستة مثلثات متساوية الأضلاع فى الدائرة، ومقدار كل زاوية فى كل مثلث تساوى ستين درجة. أما الساميون فقد بيّنت الدراسة كيف استعملوا الأرقام الحرفية، فدوّنوا الأرقام باستعمال حروف

الهجاء العربية بحيث يدل على كل حرف برقم معين من الأحاد وحتى مئات الألف.

أما بلاد اليونان فقد عرفت بدورها الرياضيات وطورتها بعد أن اقتبست عن المصريين والسومريين والبابليين. ولما نقل العرب والمسلمين تراث اليونان لم تستطع الرياضيات اليونانية أن تروى ظمأهم لتعلقها بالجانب النظرى المجرد، واجتذب العرب والمسلمون الناحية العملية من الرياضيات، فلم يكتفوا باستيعاب الهندسة اليونانية، ولكنهم اهتموا أيضاً بتطبيقها عملياً، وقد نجحوا فى ذلك أيما نجاح، وهنا تكمن عبقرية المسلمين وأثرها العظيم فى تقدم العلم عامة والرياضيات خاصة، والجبر بصورة أخص، وذلك ما وقفت عليه الدراسة فى الفصل الأول من باب طبقات علماء الرياضيات فى الحضارة الإسلامية والذى بحث فى إمام الرياضيين المسلمين محمد بن موسى الخوارزمى، وبيّن كيف بدأ تكوين الخوارزمى العلمى، ومدى أثر هذا التكوين فى نشاطه العلمى، وذلك بغرض معرفة أبعاد الإنجاز الذى تم على يد الخوارزمى باعتباره إمام علماء الرياضيات المسلمين. وكل ذلك قادنى بطبيعة الحال إلى التعرف على أبعاد إنجازات علماء المسلمين خلال عصر الخوارزمى، وذلك لكى أقف على مدى تأثر هؤلاء العلماء بالخوارزمى، والأهم مدى تأثر الغرب به، فوجدت أن تأثير الخوارزمى لم يمتد إلى علماء الرياضيات المسلمين فى العصور اللاحقة فقط، بل امتد إلى العالم الغربى، فلقد رأينا كيف اعترف أصحاب كتاب "تاريخ كمبريدج للإسلام" بأن الخوارزمى هو المسئول بصورة أساسية عن تأسيس علم الجبر. وقد جاءت معرفة الغرب لكتاب الجبر والمقابلة عن طريق الترجمات اللاتينية التى وضعت له، فلقد ترجم جيرارد الكريمنى الأصل العربى لكتاب الجبر والمقابلة إلى اللغة

اللاتينية في القرن الثاني عشر للميلاد، وترجمه أيضاً روبرت الشستري وأصبح أساساً لدراسات كبار علماء الرياضيات الغربيين. وإلى مصنفات الخوارزمي الأخرى يرجع الفضل في نقل الأرقام الهندية - العربية إلى الغرب حيث سميت باسمه أول الأمر *algorisms* (الغوريتمي)، ثم جعل الألمان من الخوارزمي اسماً يسهل عليهم نطقه، فأسموه *Algorismus* ، ونظموا الأشعار باللاتينية تعليقاً على نظرياته. وما زالت القاعدة الحسابية (*Algrithmus*) حتى اليوم تحمل اسمه كرائد لها. وقد نشر "فردريك روزن" كتاب الجبر والمقابلة سنة 1831م في لندن، ونشر كارنيسكي ترجمة أخرى مأخوذة من ترجمة الشستري سنة 1915. ومن هنا اتضح أن أعمال الخوارزمي في علم الرياضيات قد لعبت في الماضي والحاضر دوراً مهماً في تقدمه، لأنها أحد المصادر الرئيسة التي انتقل خلالها الجبر والأعداد العربية إلى الغرب. فعلم الجبر من أعظم ما اخترعه العقل البشري من علوم، لما فيه من دقة وأحكام قياسية عامة. والخوارزمي هو الذي وضع قواعده الأساسية وأصوله الابتدائية كما نعرفها اليوم. ومن كل ما سبق زعمت الدراسة أن الخوارزمي صاحب مدرسة رياضية ممتدة، لعبت دوراً مهماً في تطور الرياضيات منذ أن بدأ صاحبها هذا التطور، وذلك عندما انتقل من الحساب إلى الجبر، والذي اعترف العالم أجمع بأنه واضعه الحقيقي.

وبينت الدراسة كيف أن الحضارة الإنسانية لم تتوقف على الاستفادة من الحضارة الإسلامية في الرياضيات على الخوارزمي فحسب، بل اعتبر علماء الغرب ثابت بن قرّة أعظم هندسي عربي على الإطلاق، وهو الذي ترجم الكتب السبعة من أجزاء المخطوطات في كتب أبولونيوس الثمانية إلى العربية فحفظ للإنسانية بذلك ثلاث كتب من مخطوطات أبولونيوس فقدت أصولها

اليونانية. ورأت الدراسة أن ثابت بن قرة يُعد من أوائل علماء الحضارة الإسلامية الذين تصدوا للبرهنة على المصادر الخامسة لإقليدس الخاصة بالخطوط المتوازية بعد أن فشل علماء اليونان في البرهنة عليها. وما من شك في أن هذه المصادر تلعب دوراً مهماً في علم الهندسة، وليس أدل على ذلك من أنها شغلت تفكير علماء الرياضيات منذ القرن الثالث قبل الميلاد وحتى القرن التاسع عشر الميلادي. وقد تصدى علماء الحضارة الإسلامية للبرهنة على هذه المصادر، وبذلوا جهوداً كبيرة في إثباتها أدت إلى ظهور الهندسات اللاإقليدية في العصر الحديث، تلك التي اقترنت بأسماء غريبة، مع أن علماء الحضارة الإسلامية هم الرواد الأول لهذه الهندسات، ومنهم ثابت بن قرة.

وأوضحت الدراسة أن كتاب الارثماطيقى في الأعداد والجبر والمقابلة يُعد أشهر كتب أبي كامل المصري، حيث استمر هذا الكتاب فاعلاً في التقاليد الرياضياتية عبر العصور اللاحقة، ووضعت له شروحات كثيرة. وقد وصلت إلينا في نسختين مخطوتين، وترُجم إلى العبرية ترجمة ناقصة، وترُجم إلى اللغة الإنجليزية ونُشر سنة 1966 بمعرفة مارتن ليفي. ويشتمل كتاب الجبر والمقابلة لأبي كامل على معادلات الخوارزمي الست شارحاً لها، ومعللاً بعضها، وأضاف عليها معادلات كثيرة بلغت تسع وستين معادلة وربطها بالهندسة. ويُعد أبو كامل بحسب مارتن ليفي أول من حل المعادلات الجبرية التي درجتها أعلى من الدرجة الثانية، ووردت هذه الحلول لأول مرة في تاريخ الرياضيات ضمن مصنفاته في المضلعين الخماسي والعشاري، فضلاً عن كتاب الجبر والمقابلة. وإذا كان الخوارزمي قد أوجد الجذر الموجب لمعادلات الدرجة الثانية، فإن أبا كامل اهتم بإيجاد الجذرين الموجب والسالب،

واستطاع حل الكثير من المعادلات المحتوية على مجهولين وأكثر حتى خمسة مجاهيل .. وهكذا أوضحت الدراسة أن أبا كامل المصري كَمَل جبر الخوارزمي وأضاف عليه، ففسر مبادئه بطريقة جازمة، وعالج الجذور الصم، وأجرى العمليات الحسابية من جمع وطرح على الحدود الجبرية، وكل هذه العمليات مثلت تطويراً مهماً لعلم الجبر في العصور اللاحقة لأبى كامل، وأثرت فيمن جاء بعده من علماء الرياضيات المسلمين كالكرخي، وعمر الخيام، وامتد التأثير إلى علماء الغرب، بل وعلماء الأرض على حد قول فلورين كاجورى فى كتابه "تاريخ الرياضيات" حيث قال: "كانت مؤلفات أبى كامل خلال القرن الثالث عشر للميلاد من المراجع الفريدة لعلماء الرياضيات فى جميع أنحاء المعمورة". وكما اعتمد العالم ليوناردو لىبىزى على مؤلفات أبى كامل، قرر هورد ليفز أن العالم الرياضياتى المشهور "قابوناسى" استند فى مؤلفاته فى علمى الحساب والجبر على مؤلفات الخوارزمي وأبى كامل المصرى.

وبيّنت الدراسة كيف عُد أبو الوفاء البوزجاني أحد الأئمة المعدودين فى الرياضيات والفلك، وألف فيهما مؤلفات مهمة أفادت منها الإنسانية، ففى الرياضيات برع أبو الوفاء فى الهندسة واكتشف فيها كشافاً لم يسبقه إليها أحد، وكذلك الجبر حيث زاد فى بحوث الخوارزمي زيادات تعد أساساً لعلاقة الهندسة بالجبر، ومنها أنه حل هندسياً معادلات من الدرجة الرابعة، وأوجد حلولاً تتعلق بالقطع المكافئ مهدت السبل لعلماء الغرب فيما بعد أن يدعوا تقدمهم بالهندسة التحليلية خطوات واسعة أدت إلى أروع ما وصل إليه العقل البشرى وهو التفاضل والتكامل. وينكشف إدعاؤهم إذا علمنا أن علم التفاضل والتكامل تم اكتشافه فى الحضارة الإسلامية أيضاً على يد ثابت بن قرّة. ومع

ذلك اعترف علماء الغرب بأن أبا الوفاء هو أول من وضع النسبة المثلثية "ظل"، وأول من استعملها في حلول المسائل الرياضية، وأدخل القاطع، والقاطع تمام، ودرس تربيع القطع المخروطي المكافئ بأنواعه الثلاثة: مكافئ، وناقص، وزائد، كما درس المساحة الحجمية للقطع المكافئ المجسم، وأوجد طريقة جديدة لحساب جداول الجيب التي امتازت بدقتها. ووضع البوزجاني الجداول للمماس، ووضع المعادلات التي تتعلق بجيب زاويتين، وبهذه الاكتشافات، وخاصة وضع "ظل" في أعداد النسبة المثلثية أصبح البوزجاني في نظر علماء الغرب من الخالدين، حيث أسس بذلك ووضع أحد الأركان التي قام عليها علم حساب المثلثات الحديث.

وأثناء البحث في أبي سهل الكوهي، كشفت الدراسة عن وضعه عدداً من المؤلفات الهندسية المهمة ضمنها إنجازاته الهندسية وفي مقدمتها اهتمامه بمسائل أرشميدس وأبولونيوس التي تؤدي إلى معادلات ذات درجة عالية من معادلات الدرجة الثانية، والفروض التي لم يستطع أرشميدس إثباتها قد تمكن الكوهي من استخراج حلها ببراعة فائقة، وقد شكل هذا الحل أهمية في تاريخ الهندسة، وعُدَّ من أحسن ما كُتب عن الهندسة عند المسلمين. وإذا كان ثابت بن قرة قد ابتدع علم التفاضل والتكامل بإيجاده حجم الجسم المتولد من دوران القطع المكافئ حول محوره، فإن الكوهي قد طور مسيرة هذا العلم بإيضاحه كيفية إنشاء قطعة كروية تكافئ قطعة كروية أخرى معلومة، وتساوى مساحة سطحها الجانبي مساحة السطح الجانبي لقطعة كروية ثابتة معلومة.

أما الكرخي فقد بينت الدراسة كيف شرع في حسنة الجبر بمحاولة استغناء العمليات الجبرية عن التمثيل الهندسي. وقد استطاع الكرخي بالفعل أن

يحقق تلك الخصوصية الجبرية وجاءت نظريته التى وقف عليها فبكه أحد علماء الرياضيات الغربيين المشهورين، وانتهى بعد دراسته لكتاب الكرخى الكافى فى الحساب مقررأ أنها النظرية الأكثر اكتمالاً، أو بالأصح النظرية الوحيدة فى الحساب الجبرى عند المسلمين التى نعرفها حتى اليوم. وأوضحت الدراسة كيف وضع الكرخى تطويراً فريداً لقانون حل معادلات الدرجة الثانية لم يسبقه إليه أحد، وأصبح قانوناً رئيساً فى علم الجبر. كذلك طوّر الكرخى القانون الخاص بإيجاد الجذر التقريبى للأعداد التى ليس جذر، وابتكر صيغة جديدة تخرج الجذر التقريبى لما لا يمكن إخراجها من الأعداد، كما ابتكر طريقة معالجة مختلف المتواليات، وعُدّ أول من عالج وبرهن على المتوالية التى سماها "الإندراجية". وعن طريق حله لمعادلة عددين مجموع مكعبيهما يساوى مربع العدد الثالث، استنتج الكرخى المعادلة التى لا يخلو منها كتاب فى الجبر، وهى: $أس^٣ + ب ص^٣ = م ع^٣$ ^١. وابتكر قانوناً يسمح بجمع وطرح الأعداد لاصم، وهى الأعداد التى ليس لها جذر وهو:

$$\sqrt[3]{ا + (ب + 2\sqrt{أ ب})} = \sqrt[3]{أ} + \sqrt[3]{ب}$$

وأثبتت الدراسة أن المثلث المشهور الذى ادعاه بسكال الفرنسى (ت 1662) لنفسه هو مثلث الكرخى الذى دشنه ضمن أهم مبتكراته الرياضياتية وهى اكتشافه نظرية ذات الأسين أو ذات الحدين لأسس صحيحة موجبة، وترتيبه معاملات مفكوك $(س + 1)^٣$ ، فجاء مثلثه لمعاملات نظرية ذات الحدين. وظل الغرب يستفيد من جبر وحساب الكرخى حتى القرن التاسع عشر، حيث ترجم هوسهيلم كتاب الكرخى "الكافى فى الحساب" إلى اللغة الألمانية، وبه أصبحت أوربا، على حد قول جورج سارتون، مدينة للكرخى الذى قدم للرياضيات أعم وأكمل نظرية فى علم الجبر عرفتها، وبقيت حتى

القرن التاسع عشر الميلادي تستعمل مؤلفاته في علمي الحساب والجبر، وعُدَّ الكرخي، بحسب هورد إيفز، من بين العلماء الرياضيين المبتكرين لما في كتابه الفخرى من نظريات جبرية جديدة تدل على عمق وأصالة في التفكير، وهو أحسن كتاب في علم الجبر في العصور الإسلامية (الوسطى) مستنداً على كتاب محمد بن موسى الخوارزمي "الجبر والمقابلة"، وامتاز كتاب الفخرى بطابعه الأصيل في علم الجبر لما فيه من الابتكارات الجديدة والمسائل التي لا يزال لها دور في الرياضيات الحديثة.

ورأت الدراسة في عمر الخيام كيف اطلع على أعمال الخوارزمي وتناولها بالدرس جاعلاً من نفسه منافساً للخوارزمي يحاول أن يصل إلى أشياء جديدة لم يصل إليها، وبالفعل وضع الخيام كتابه "في الجبر" الذي فاق كتاب الخوارزمي في نظر البعض. فقد ركز الخيام جُلَّ اهتمامه على حل جميع أنواع معادلات الدرجة الثالثة وهي المسألة التي لم يتوصل أسلافه إلى حل لها عن طريق الجذور، فحلها الخيام بالطريق الهندسية. وقد أثبتت الدراسة أن طريقة حل معادلات الدرجة الثالثة التي أبدعها الخيام، أخذها رينيه ديكارت الفرنسي (ت 1650) بنسخها الحرفي وضمناها كتابه "الجومطري" بدون أن يشير إلى صاحبها الأصلي عمر الخيام. كما أثبتت الدراسة أن سيمون الهولندي (ت 1620) قد ادعى لنفسه فكرة "التصنيف" الذي أبدعها عمر الخيام الذي يُعد باعتراف جورج سارتون، أول من أبدع فكرة التصنيف، فعدّ بذلك أول من مهد الطريق أمام تكشين "الهندسة التحليلية"، إذ قام بتصنيف المعادلات بحسب درجتها، وبحسب الحدود التي فيها محصورة في أربعة عشر نوعاً، وبرهن هندسياً على حل معادلة منها باستخدام القطوع المخروطية الثلاث: الدائرة، والقطع المكافئ، والقطع الزائد. وأثبتت الدراسة كيف انتحل أحد علماء

الرياضيات الغربيين وهو ياكيرى (ت 1733) فروض عمر الخيام الثلاثة وضممتها فى نظريته عن الخطوط المستقيمة ونسبها له مؤرخو الرياضيات الغربيون، إلا أن مؤلفات الخيام تثبت بما لا يدع مجالاً للشك أنه أول من أبدعها واستعملها فى تاريخ الرياضيات، وذلك حينما برهن على المصادرة الخامسة لإقليدس ذلك البرهان الذى ساهم فى تطور الهندسة الحديثة، فقد افترض الخيام فروضاً ثلاثة للبرهنة على أنه إذا كانت زاويتان فى مستطيل متساوى الأضلاع تساوى كل منهما زاوية قائمة، فإن الزاويتين الأخرتين تساوى كل منهما زاوية قائمة، ويستحيل أن تكون حادة أو منفرجة، وانتهى إلى أنه لا يبقى إلا أن يكونا زاويتين قائمتين، فعُدَّ الخيام أول من استعمل هذه الفروض الثلاثة (الزاويتان حادتان - منفرجتان - قائمتان)، ومما لاشك فيه أن هذه الفروض تلعب دوراً مهماً فى الهندسات اللاإقليدية الحديثة.

وأوضحت الدراسة أن الفضل يرجع لنصير الدين الطوسى فى ابتكار وتعريف الأعداد الصم، وهى الأعداد التى ليس جذر، والتى لا تزال تشغل أهميتها فى الرياضيات الحديثة. كما أثبتت الدراسة أن الطوسى يُعد أول من فصل علم حساب المثلثات عن علم الفلك ووضع أول كتاب فى حساب المثلثات سنة 648هـ/ 1250م وهو كتاب "أشكال القطاعات" الذى دَوَّن فيه أول تطوير لنظرية جيب الزاوية إلى ما هى عليه الآن، وذلك باستعماله لمثلث المستوى. وأثبتت الدراسة أن بعض الغربيين انتحل كثيراً من نظريات كتاب الطوسى ونسبها لنفسه، فالناظر فى كتاب ريجيومونتانوس "علم حساب المثلثات" يدرك لأول وهلة أن كثيراً من نظرياته وأفكاره موجودة بنصها فى كتاب نصير الدين الطوسى "أشكال القطاعات" الذى عُدَّ أول كتاب من نوعه على مستوى العالم يفصل علم المثلثات عن علم الفلك، واعتمد مرجعاً رئيساً

لكل علماء الغرب الباحثين فى علم المثلثات الكروية والمستوية، وذلك بعد ترجمته إلى اللاتينية والإنجليزية والفرنسية، فدرسوه وأفادو به إلى الدرجة التى معها نسب ريجيومونتانوس كثيراً من نظرياته لنفسه كما ذكرت. وبيّنت الدراسة كيف أظهر الطوسى براعة فائقة وخارقة للعادة، بحسب جورج سارتون، فى معالجة قضية المتوازيات فى الهندسة حيث ألم بأسس الهندسة المستوية المتعلقة بالمتوازيات، وبرهن كثيراً من مسائلها، تلك البراهين التى شكلت نظرية أساس عمل الاسطرلاب، ولأول مرة فى تاريخ الرياضيات استطاع الطوسى من دراسة المثلث الكروى قائم الزاوية، وأوجد منه متطابقات مثلثية. وانتهت الدراسة فى الطوسى إلى أن أهم ما قدمه للإنسانية جمعاء وضعه للهندسة اللاإقليديسية الحديثة التى تلعب دوراً مهماً حالياً فى تفسيرات النظرية النسبية ودراسة الفضاء، وإذا كانت الهندسة اللاإقليديسية الحديثة قد اقترنت حديثاً بأسماء غربية مثل فاوس وريمان الألمانين، وبولياى المجرى، ولوباتشوفسكى الروسى، فإن الدراسة قد أتت بشهادات غربية أيضاً ترجع الفضل لأهله وتعتزف بوضع نصير الدين الطوسى للهندسة اللاإقليديسية الحديثة، فقد برهن الطوسى بكل جدارة، على حد قول درك سترىك، على المصادرة الخامسة من مصادرات إقليدس، وتوصل وبرهن على أن مجموع زوايا المثلث تساوى قائمتين، وذلك يكافئ المصادرة الخامسة من مصادرات إقليدس، وبذلك يكون الطوسى قد وضع أساس الهندسة اللاإقليديسية الحديثة. ويذكر هورد إفز أن جرولاسكرى الإيطالى المسمى بأبى الهندسة اللاإقليديسية قد اعتمد بصورة أساسية على عمل نصير الدين الطوسى فى هذا الميدان من الهندسة. ويدرس جان والس الرياضياتى الإنجليزى الشهير برهان نصير الدين الطوسى على المصادرة الخامسة لإقليدس، ويخرج من دراسته معترفاً

بفضل نصير الدين الطوسي فى وضع الهندسة اللاإقليدسية وظهور فجر الرياضيات الحديثة.

وذهبت الدراسة إلى أن أهمية العالم إنما تقاس بما قدمه من تطوير لعلمه الذى يبحث فيه، وبيّنت كيف قدم ابن البناء المراكشى من الأفكار والنظريات الرياضياتية المبتكرة ما أدت إلى تطور وتقدم علم الرياضيات فى الحضارة الإسلامية، وفى العصور اللاحقة، وقد دل على ذلك أن كتاب تلخيص أعمال الحساب لابن البناء نال اهتمام علماء الرياضيات فى العصور اللاحقة له، فدرسوه ولخصوه، وشرحوه شروحات متعددة، ظل بعضها، وهو شرح القلصادى الكبير من المراجع الرياضياتية الرئيسة على الجانبين العربى والغربى، وبيّنت الدراسة كيف ادعى بعض الغربيين كثيراً من نظريات ابن البناء ونسبوها لأنفسهم زوراً وبهتاناً، ولكن الدراسة وقفت فى الوقت نفسه على شهادات غربية معترفة بهذا الزور وذاك البهتان وتُرّجع الفضل لأهله، ففي النصف الأخير من القرن التاسع عشر الميلادى ترجم أريستيدمار كتاب تلخيص أعمال الحساب لابن البناء إلى اللغة الفرنسية، وبعد أن درسه دراسة وافية، قرر أن كثيراً من النظريات الرياضياتية المنسوبة لعلماء غربيين هى نظريات ابن البناء المراكشى. وهذا ما حدا بديفيد سميث أن يذكر أن كتاب تلخيص أعمال الحساب لابن البناء يشتمل على بحوث كثيرة فى الكسور ونظريات لجمع مربعات الأعداد ومكعباتها وقانون الخطأين لحل المعادلة من الدرجة الأولى. وقدم ابن البناء، بحسب فرانسيس كاجورى، خدمة عظيمة بإيجاده الطرق الرياضياتية البحتة وإيجاده القيم التقريبية لجذور الأعداد الصم، ولذا رأى جورج سارتون أن كتاب تلخيص أعمال الحساب لابن البناء المراكشى يحتوى على نظريات حسابية وجبرية مفيدة، إذ أوضح العويص

منها إيضاحاً لم يسبقه إليه أحد، لذا يُعد كتابه من أحسن الكتب التى ظهرت فى علم الحساب.

وإذا كان الخلاف بين علماء الرياضيات كبير، على حد قول ديفيد سميث، فإن غالبيتهم يتفق على أن غياس الدين الكاشى هو الذى ابتكر الكسر العشرى، ويعترف سميث بأن المسلمين فى عصر الكاشى سبقوا الأوربيين فى استعمال النظام العشرى، وأنهم كانوا على معرفة تامة بالكسور العشرية، ولا يخفى ما لهذا الابتكار من أثر بالغ فى اختراع الآلات الحاسبة.

وأوضحت الدراسة كيف بحث الكاشى كيفية تعيين نسبة محيط الدائرة إلى قطرها، وأوجد الكاشى تلك النسبة، على حد قول سميث، إلى درجة من التقريب لم يسبقه إليها أحد، وتكاد تعادل النسبة التى استخرجها علماء القرن العشرين بالآلات الحاسبة، فوصلت نسبة الكاشى إلى 16 خانة عشرية، وقیمتها 3.1415926535898732.

وبينت الدراسة كيف توصل الكاشى إلى قانون خاص بمجموع الأعداد الطبيعية أو المتسلسلة العددية المرفوعة إلى القوة الرابعة، وهو قانون لا يمكن التوصل إليه بقليل من النبوغ على رأى كرادى فو. فقد توصل علماء الحضارة الإسلامية قبل الكاشى إلى قوانين عدة فى مجموع الأعداد الطبيعية المرفوعة إلى القوة الأولى والثانية والثالثة، وزاد الكاشى بوضع قانون مجموع الأعداد الطبيعية المرفوعة إلى القوة الرابعة. ومما لاشك فيه أن هذا القانون أدى إلى تطور علم الأعداد تطوراً ممتداً منذ الكاشى وحتى العصر الحديث، خاصة وأن الكاشى استطاع إيجاد خوارزمية لحساب الجذور النونية لأى عدد والتى عُدت حالة خاصة للطرق التى اكتشفت بعد ذلك بقرون فى العصر

الحديث بمعرفة "هورنر". وأوضحت الدراسة أنه إذا كان بعض مؤرخي الرياضيات الغربيين ينسبون نظرية "ذات الحدين" لإسحاق نيوتن أو لغيره من الغربيين، فإن منهم من يعترف بأن صاحبها هو غياث الدين الكاشى، ففى كتابه مصادر الرياضيات يقرر دريك سترويك أن الكاشى هو أول من فكر فى طريقة ذات الحدين - بعد أن وضع أساسها الكرخى وعمر الخيام-، ويرجع له الفضل فى تطوير خواص معاملاتها، فاستخدم لإيجاد حدود المعادلة الجبرية قاعدة عمر الخيام وطورها وجعلها قاعدة عامة لنظرية ذات الحدين لأى أس صحيح. ولا يغيب عن البال ما لنظرية ذات الحدين من أهمية فى الرياضيات حتى الآن.

ولا تقل أهمية نظرية ذات الحدين عن أهمية الرموز الجبرية، تلك التى أثبتت الدراسة وبيّنت أن أبا الحسن القلصادى هو أول من دشن واستعمل الإشارات والرموز الجبرية المستعملة فى الجبر حتى الآن. ودون القلصادى رموزه هذه فى كتابه "كشف الأسرار عن علم الغبار" الذى امتدت أهميته من المسلمين إلى الغرب الذى ترجمه إلى اللاتينية وأفاد بما فيه، وبيّنت الدراسة أن هذا الكتاب يثبت بما لا يدع مجالاً للشك أن أحد الرياضيين الغربيين وهو فرانسوا فيته (ت 1603) الذى اشتهر بعلم المثلثات والهندسة والجبر، قد أخذ رموز القلصادى فى مبدأ استعمال الرموز فى الغرب ونسبها لنفسه. وأوضحت الدراسة أيضاً أن كتاب "كشف الأسرار عن علم الغبار" يثبت وباعتراف أحد مؤرخي الرياضيات الغربيين وهو فرانسيس كاجورى أن القلصادى قد استخرج قيمة تقريبية للجزء التربيعى للكمية $(a^2 + b)$ ، وهذه القيمة التقريبية أخذها علماء الرياضيات الغربيين وخاصة ليوناردو أف بيزا الإيطالى ومواطنه تارتاليا وغيرهما واستعملوها فى إيجاد القيم التقريبية

للجذور الصم. وانتهت الدراسة فى القلصادى باعتباره آخر المؤلفين الكبار فى الأندلس بإيضاح اسهامه فى تطور الرياضيات، وخاصة علم الحساب وعلم الجبر، فقد أسدى للإنسانية خدمة جليلة بتطويره علم الجبر، ذلك التطوير الذى ظل ممتداً منذ عصره وحتى العصر الحديث، وليس أدل على ذلك من أن مؤلفاته فى الحساب والجبر، وخاصة كتابه "كشف الأسرار عن علم الغبار" ظلت معيناً ينهل منه طلاب العلم فى الغرب حتى القرن العشرين.

يتضح من كل ما سبق أن العمل العلمى الذى قُدم فى هذا الكتاب يدل بصورة قوية على مدى إسهام علماء الرياضيات المسلمين فى تأسيس علوم الرياضيات الحديثة. وحاول الكتاب عبر صفحاته أن يُرجع إلى علماء الرياضيات المسلمين كثيراً من اكتشافاتهم وابتكاراتهم الرياضياتية التى أخذها بعض علماء الغرب ونسبوها إلى أنفسهم، الأمر الذى يجعلنا نقف بصورة ما على حجم الإسهام الرياضياتى الإسلامى فى الحضارة الإنسانية، ذلك الحجم الذى يحتوى على أسس الرياضيات الحديثة فى الحضارة الإسلامية.

وتلك هى النتيجة النهائية التى تنتهى إليها هذه الدراسة.

والله أعلى وأعلم .

أهم المصادر والمراجع

- ابن البناء المراكشى : تلخيص أعمال الحساب، مخطوط مكتبة
المخطوطات التونسية رقم 307ر.
- : رسالة فى الأعداد التامة والزائدة والناقصة
والمتحابة، تحقيق محمد سويسى، مجلة الجامعة
التونسية، العدد 13، 1976.
- ابن النديم : الفهرست، طبعة القاهرة القديمة، 1984.
- أبو الوفاء البوزجاني : فيما يحتاج إليه الصناع من أعمال الهندسة،
مخطوط مكتبة أياصوفيا رقم 8753، ومكتبة
الأمبروزيانا، كتالوج 44، رقم 68.
- دكتور أحمد فؤاد باشا : التراث العلمى للحضارة الإسلامية ومكانته فى
تاريخ العلم والحضارة، دار المعارف، القاهرة
1993.
- ثابت بن قرة : رسالة فى برهان المصادرة المشهورة من
إقليدس، تحقيق خليل جاويش، ضمن كتابه
نظرية المتوازيات فى الهندسة الإسلامية،
المؤسسة الوطنية للترجمة والتحقيق والدراسات،
تونس 1988.
- دكتور خالد حربى : علوم حضارة الإسلام ودورها فى الحضارة
الإنسانية، سلسلة كتاب الأمة، قطر 2004.
- الخوارزمى، أبو عبد : كتاب الجبر والمقابلة، تحقيق على مصطفى
محمد بن موسى مشرفة، ومحمد مرسى أحمد، ملحق بكتاب

ماهر عبد القادر: التراث والحضارة الإسلامية،

دار المعرفة الجامعية، الإسكندرية، 1997.

دكتور رشدى راشد : تاريخ الرياضيات العربية، مركز دراسات

الوحدة العربية، بيروت 1989.

دكتور رشدى راشد، : رياضيات عمر الخيام، ترجمة نقولا فارس،

وييجان وهاب زاده مركز دراسات الوحدة العربية، بيروت 2005.

زيجريد هونكه : شمس العرب تسطع على الغرب، ترجمة فاروق

بيضون، كمال دسوقي، مراجعة فاروق عيسى

الخورى، المكتب التجارى للطباعة والنشر،

بيروت 1969.

دكتور عبد الحميد : برهان نصير الدين الطوسى على مصادرة

صيره إقليدس الخامسة، مجلة كلية الآداب، جامعة

الإسكندرية، المجلد الثالث عشر، طبعة جامعة

الإسكندرية، 1959.

عمر الخيام النيسابورى : رسالة فى شرح ما أشكل من مصادرات كتاب

إقليدس، تحقيق عبد الحميد صبره، منشأة

المعارف، الإسكندرية 1961.

القفطى : إخبار العلماء بأخبار الحكماء، طبعة القاهرة

1326هـ.

كارادى فو الفلك والرياضيات، بحث ضمن كتاب تراث

الإسلام، تأليف جمهرة من المشتشرقين، تعريب

وتعليق جرجيس فتح الله، بيروت 1972.

الكرخي، أبو بكر محمد : الكافي في الحساب، مخطوط مكتبة كوبريلي
بن الحاسب باستانبول رقم 950.

دكتور ماهر عبد القادر : التراث والحضارة الإسلامية، دار المعرفة
محمد الجامعية، الإسكندرية، 1997.

محمد عاطف البرقوقي، : الخوارزمي العالم الرياضى الفلكى، الدار
وآخرون القومية للطباعة والنشر (د. ت).

Christopher, J. B; The Islamic, Harper & Row,
Publishers, New York, 1972.

Holt, P. M & Ann, The Cambride History of Islamic
K.S.L and Lewis; Society and Civilization, Cambridge
University, Press 1970.

فهرست الكتاب

الصفحة	الموضوع
5	مقدمة
11	مدخل تمهيدى: تطور الرياضيات حتى الحضارة الإسلامية
21	باب فى طبقات علماء الرياضيات فى الحضارة الإسلامية
23	الفصل الأول: الخوارزمى
47	الفصل الثانى: ثابت بن قرة
59	الفصل الثالث: أبو كامل المصرى
65	الفصل الرابع: أبو الوفاء البوزجاني
71	الفصل الخامس: الكوهى
75	الفصل السادس: الكرخى
85	الفصل السابع: عمر الخيام
101	الفصل الثامن: نصير الدين الطوسى
119	الفصل التاسع: ابن البناء المراكشى
127	الفصل العاشر: الكاشى
135	الفصل الحادى عشر: القلصادى
143	نتائج الدراسة
159	أهم المصادر والمراجع
163	فهرست الكتاب
165	أعمال الدكتور خالد حربى

أعمال الدكتور خالد حربى

- 1- برء ساعة : للرازى (دراسة وتحقيق)، دار ملتقى الفكر، الإسكندرية 1999، الطبعة الثانية، دار الوفاء 2005 .
- 2- نشأة الإسكندرية وتواصل نهضتها : الطبعة الأولى، دار ملتقى الفكر، الإسكندرية 1999. العلمية.
- 3- أبو بكر الرازى حجة الطب فى العالم : الطبعة الأولى، دار ملتقى الفكر، الإسكندرية 1999، الطبعة الثانية، دار الوفاء، الإسكندرية 2006.
- 4- خلاصة التداوى بالغذاء والأعشاب : الطبعة الأولى، دار ملتقى الفكر الإسكندرية 1999- الطبعة الثانية 2000، توزيع مؤسسة أخبار اليوم ، الطبعة الثالثة دار الوفاء ، الإسكندرية 2006 .
- 5- الأسس الایستمولوجية لتاريخ الطب : دار الثقافة العلمية،الإسكندرية 2001 ، الطبعة الثانية ، دار الوفاء ، الإسكندرية 2005. العربي
- 6- الرازى فى حضارة العرب : (ترجمة وتقديم وتعليق)، دار الثقافة العلمية، الإسكندرية 2002.
- 7- سر صناعة الطب : للرازى (دراسة وتحقيق)، دار الثقافة العلمية الإسكندرية 2002 ، الطبعة الثانية، دار الوفاء، الإسكندرية 2005.
- 8- كتاب التجارب : للرازى (دراسة وتحقيق)، دار الثقافة العلمية، الإسكندرية 2002 ، الطبعة الثانية دار الوفاء الإسكندرية 2005.
- 9- جراب المجربات وخزانة الأطباء : للرازى (دراسة وتحقيق وتعليق)، دار الثقافة العلمية، الإسكندرية 2000، الطبعة الثانية دار الوفاء الإسكندرية 2005.
- 10- المدارس الفلسفية فى الفكر الإسلامى(1) "الكندى والفارابى" الثانية ، المكتب الجامعى الحديث ، الإسكندرية 2009. الطبعة الأولى منشأة المعارف، الإسكندرية 2003 .
- 11- دراسات فى الفكر العلمى المعاصر : الطبعة الأولى ، دار الوفاء ، الإسكندرية 2003 . (1) علم المنطق الرياضى
- 12- دراسات فى الفكر العلمى المعاصر (2) : الطبعة الأولى ، دار الوفاء ، الإسكندرية 2003 . الغائية والحتمية وأثرهما فى الفعل الإنسانى

- 13- دراسات فى الفكر العلمى المعاصر : الطبعة الأولى ، دار الوفاء ، الإسكندرية 2003 .
- (3) إنسان العصر بين البيولوجيا والهندسة الوراثية .
- 14- الأخلاق بين الفكرين الإسلامى والغربى : الطبعة الأولى منشأة المعارف، الإسكندرية 2003. الطبعة الثانية ، المكتب الجامعى الحديث ، الإسكندرية 2009.
- 15- العولمة بين الفكرين الإسلامى والغربى "دراسة مقارنة" : الطبعة الأولى ، منشأة المعارف ، الإسكندرية 2003 ، الطبعة الثانية دار الوفاء ، الإسكندرية 2007 ، الطبعة الثالثة ، المكتب الجامعى الحديث ، الإسكندرية 2010 .
- 16- العولمة وأبعادها . : مشاركة فى كتب "رسالة المسلم المعاصر فى حقبة العولمة" ، الصادر عن وزارة الأوقاف والشئون الإسلامية بدولة قطر - مركز لبحوث والدراسات ، رمضان 1424 ، لكتوبر - نوفمبر 2003.
- 17- الفكر الفلسفى اليونانى وأثره فى اللاحقين : الطبعة الأولى ، دار الوفاء ، الإسكندرية 2003 ، الطبعة الثانية ، المكتب الجامعى الحديث ، الإسكندرية 2009.
- 18- ملامح الفكر السياسى فى الإسلام : الطبعة الأولى دار الوفاء ، الإسكندرية 2003 ، الطبعة الثانية ، المكتب الجامعى الحديث ، الإسكندرية 2009.
- 19- The Role of Orientalization in the West's Attitude to Islam and its civilization, Dar Al - Sakafa Al - Alamia, Alexandria 2003.
- 20- شهيد الخوف الإلهى ، الحسن البصري : الطبعة الأولى دار الوفاء، الإسكندرية 2003 ، الطبعة الثانية ، دار الوفاء ، الإسكندرية 2006 .
- 21- دراسات فى التصوف الإسلامى : الطبعة الأولى دار الوفاء ، الإسكندرية 2003.
- 22- بنية الجماعات العلمية العربية الإسلامية : الطبعة الأولى دار الوفاء، الإسكندرية 2004 ، الطبعة الثانية ، دار الوفاء ، الإسكندرية 2010.
- 23- نماذج لعلوم الحضارة الإسلامية : الطبعة الأولى ، دار الوفاء ، الإسكندرية 2005 .
- 24- مقالة فى النقرس للرازى : الطبعة الأولى، دار الوفاء، الإسكندرية 2005، الطبعة الثانية ، المكتب الجامعى الحديث ، الإسكندرية 2009. (دراسة وتحقيق).
- 25- للتراث المخطوط: روية فى التبصير والفهم(1) : الطبعة الأولى، دار الوفاء، الإسكندرية 2005. علوم الدين لحجة الإسلام أبى حامد الغزالى.

- 26- التراث المخطوط: رؤية في التبصير : الطبعة الأولى، دار الوفاء، الإسكندرية 2005.
والفهم (2) المنطق.
- 27- علوم حضارة الإسلام ودورها في : الطبعة الأولى ، سلسلة كتاب الأمة ، قطر 2005.
الحضارة الإنسانية
- 28- علم الحوار العربي الإسلامي "آدابه : الطبعة الأولى ، دار الوفاء ، الإسكندرية 2006.
وأصوله".
- 29- المسلمون والآخر حوار وتفاهم : الطبعة الأولى ، دار الوفاء ، الإسكندرية 2006. الطبعة
الثانية ، المكتب الجامعي الحديث، الإسكندرية 2009.
- 30- الأسر العلمية ظاهرة فريدة في : الطبعة الأولى ، دار الوفاء، الإسكندرية 2006، الطبعة الثانية
الحضارة الإسلامية . ، المكتب الجامعي الحديث ، الإسكندرية 2009.
- 31- العتب بتراث الأمة فصول متوالية (1) . : الطبعة الأولى ، الإسكندرية 2006.
- 32-العتب بتراث الأمة (2) مائة الأثر الذى : الطبعة الأولى ، الإسكندرية 2006.
فى وجه القمر للحسن بن الهيثم فى
الدراسات المعاصرة .
- 33- منهاج العابدين لحجة الإسلام الإمام : الطبعة الأولى، دار الوفاء، الإسكندرية 2007 ، الطبعة
الثانية ، المكتب الجامعي الحديث، الإسكندرية 2010.
- 34- ابداع الطب النفسى العربى الإسلامى : الطبعة الأولى ، المنظمة الإسلامية للعلوم الطبية ، الكويت
، دراسة مقارنة بالعلم الحديث . 2007.
- 35- مخطوطات الطب والصيدلة بسين : الطبعة الأولى ، دار الوفاء ، الإسكندرية 2007.
الإسكندرية والكويت
- 36- مقدمة فى علم "الحوار" الإسلامى : الطبعة الأولى ، المكتب الجامعي الحديث ، الإسكندرية 2009.
- 37- تاريخ كيمبردج للإسلام ، العلم : الطبعة الأولى، المكتب الجامعي الحديث ، الإسكندرية
(ترجمه وتقديم وتعليق) 2009.
- 38- علوم الحضارة الإسلامية ودورها : الطبعة الأولى ، المكتب الجامعي الحديث ، الإسكندرية
فى الحضارة الإنسانية 2009.
- 39- دور الحضارة الإسلامية فى حفظ : الطبعة الأولى ، المكتب الجامعي الحديث ، الإسكندرية
تراث الحضارة اليونانية (1) أبقراط "إعادة
اكتشف لملاحظات مفقودة". 2009.

- 40- دور الحضارة الإسلامية فى حفظ تراث الحضارة اليونانية (2) جالينوس : الطبعة الأولى ، المكتب الجامعى الحديث ، الإسكندرية 2009.
- "إعادة اكتشاف لمؤلفات مفقودة".
- 41- مدارس علم الكلام فى الفكر الإسلامى المعتزلة والأشاعرة : الطبعة الأولى ، المكتب الجامعى الحديث ، الإسكندرية 2009.
- 42- The Impact of sciences of Islamic Civilization on Human Civilization, Dar Al - MaKTAB Al- Gamaay Al- Hadis, Alexandria 2010.
- 43- أعلام الطب فى الحضارة الإسلامية (1) تياذوق، إعادة اكتشاف لنصوص مجهولة ومفقودة : الطبعة الأولى، دار الوفاء الإسكندرية 2010.
- 44- أعلام الطب فى الحضارة الإسلامية (2) ماسرجويه البصرى، إعادة اكتشاف لنصوص مجهولة ومفقودة : الطبعة الأولى، دار الوفاء، الإسكندرية 2010.
- 45- أعلام الطب فى الحضارة الإسلامية (3) عيسى بن حكم، إعادة اكتشاف لنصوص مجهولة ومفقودة : الطبعة الأولى، دار الوفاء، الإسكندرية 2010.
- 46- أعلام الطب فى الحضارة الإسلامية (4) عبدوس، إعادة اكتشاف لنصوص مجهولة ومفقودة : الطبعة الأولى، دار الوفاء، الإسكندرية 2010.
- 47- أعلام الطب فى الحضارة الإسلامية (5) الساهر، إعادة اكتشاف لنصوص مجهولة ومفقودة : الطبعة الأولى، دار الوفاء، الإسكندرية 2010.
- 48- أعلام الطب فى الحضارة الإسلامية (6) آل بختيشوع، إعادة اكتشاف لنصوص مجهولة ومفقودة : الطبعة الأولى، دار الوفاء، الإسكندرية 2010.
- 49- أعلام الطب فى الحضارة الإسلامية (7) الطبرى، إعادة اكتشاف لنصوص مجهولة ومفقودة : الطبعة الأولى ، دار الوفاء ، الإسكندرية 2010.

- 50-أعلام الطب فى الحضارة الإسلامية (8) : الطبعة الأولى، دار الوفاء، الإسكندرية 2010.
يحيى بن ملسويه، إعادة اكتشاف لنصوص
مجهولة ومفقودة
- 51-أعلام الطب فى الحضارة الإسلامية (9) : الطبعة الأولى، دار الوفاء، الإسكندرية 2010.
حنين بن اسحق، إعادة اكتشاف لنصوص
مجهولة ومفقودة
- 52-أعلام الطب فى الحضارة الإسلامية (10) اسحق بن حنين، إعادة اكتشاف
لنصوص مجهولة ومفقودة
- 53- طب العيون فى الحضارة الإسلامية : الطبعة الأولى المكتب الجامعى الحديث ، الإسكندرية
"أسس واكتشافات" 2010.
- 54- علم الحوار الإسلامى : كتاب المجلة العربية العدد 412 المملكة العربية السعودية
ابريل 2011
- 55-الطب النفسى فى الحضارة الإسلامية : الطبعة الأولى المكتب الجامعى الحديث ،
تنظير وتأسيس وإبداع" الإسكندرية 2011.
- 56- دور الحضارة الإسلامية فى حفظ تراث الحضارة اليونانية (4) روفس
الأفسى، إعادة اكتشاف لمؤلفات مفقودة
- 57- دور الحضارة الإسلامية فى حفظ تراث الحضارة اليونانية (5) ديسقوريدس،
إعادة اكتشاف لمؤلفات مفقودة. 2011.
- 58- الجوانية، دراسة فى فكر عثمان أمين : الطبعة الأولى ، المكتب الجامعى الحديث ، الإسكندرية 2012.
- 59- طب الباطنة فى الحضارة الإسلامية : الطبعة الأولى ، الطبعة الاولى، المكتب الجامعى
تأسيس وتأصيل" الحديث. الإسكندرية 2012.
- 60- أسس النهضة العلمية فى الإسلام : الطبعة الأولى، دار الوفاء، الاسكندرية 2012.
- 61- مبادئ النظام السياسى فى الاسلام : الطبعة الاولى، المكتب الجامعى الحديث، الاسكندرية 2012.
تأصيل وتفكير"

- 62- طب الأسنان فى الحضارة الإسلامية الطبعة الاولى،المكتب الجامعى الحديث،الاسكندرية2012.
إبداع ممتد إلى العلم الحديث
- 63- طب الأنف والأذن والحنجرة فى الطبعة الاولى،المكتب الجامعى الحديث،الاسكندرية2012.
الحضارة الاسلامية
- 64- فرق العمل العلمية فى الحضارة الطبعة الاولى، كتاب المجلة المربية، العدد 189، المملكة العربية السعودية 2012.
- 65- أسس الرياضيات الحديثة فى الطبعة الاولى، المكتب الجامعى الحديث، الاسكندرية
الحضارة الاسلامية 2012.